Lösungen lineare Funktionen Teil XVI

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Eine Brauerei rechnet für die Auslieferung seiner Getränkekisten mit dem eigenen Verkaufsfahrzeug 0,80 € pro Kiste bei monatlichen Fixkosten von 840 €.	
	a)	Erstellen Sie einen Term für die Kosten der Auslieferung von x Kisten. Welche Kosten entstehen für die Auslieferung von 2500 Kisten?
	b)	Ein Logistikunternehmen bietet die Auslieferung von Getränkekisten für 1,15 € pro Kiste an. Erstellen Sie einen Term für die Kosten der Auslieferung von x Kisten. Für welche Auslieferungszahlen ist das Logistikunternehmen kostengünstiger?
	c)	Unterbreiten Sie der Brauerei ein Angebot, sodass die Kosteneinsparung bei einem Absatz von 4000 Kisten 680 € beträgt.

A1	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$K_1(x) = 0{,}8x + 840$ 2500 Kisten: $K_1(x) = 0{,}8 \cdot 2500 + 840 = 2840$ Die Auslieferung von 2500 Kisten kostet $\underline{\underline{2840\ €}}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$K_1(x) = 0{,}8x + 840$ Brauerei, $K_2(x) = 1{,}15x$ Logistikunternehmen Kostenunterschied: $U(x) = K_1(x) - K_2(x) = 0{,}8x + 840 - 1{,}15x = -0{,}35x + 840$ Gewinn für die Brauerei wenn $U(x) > 0$ $\Rightarrow -0{,}35x + 840 > 0 \Leftrightarrow -0{,}35x > -840 \Leftrightarrow x < 2400$ Bis zu $\underline{\underline{\text{2400 Kisten}}}$ ist das Logistikunternehmen kostengünstiger.

A1	**Ausführliche Lösung**	
	c)	Neue Kostenfunktion für das Logistikunternehmen: $K_2(x) = a_1x$ Kostenunterschied: $U(x) = K_1(x) - K_2(x) = 0{,}8x + 840 - a_1x = (0{,}8 - a_1)x + 840$ Bei 4000 Kisten soll der Gewinn 680 € sein. $\Rightarrow U(4000) = (0{,}8 - a_1) \cdot 4000 + 840 = 680 \Leftrightarrow 0{,}8 - a_1 = \frac{680 - 840}{4000} \Leftrightarrow a_1 = 0{,}84$ $\Rightarrow \underline{\underline{K_2(x) = 0{,}84x}}$ Das bedeutet 0,84 € pro Kiste.

A2	Aufgabe	
	In einem volkswirtschaftlichen Modell sind die Konsumausgaben linear vom verfügbaren Einkommen abhängig. Bei einem Einkommen von 1000 € betragen die Konsumausgaben 900 €. Bei einem Einkommen von 1800 € betragen sie 1460 €.	
	a)	Ermitteln Sie einen Funktionsterm für die Konsumfunktion K.
	b)	Berechnen Sie die Höhe der Konsumausgaben wenn das Einkommen 800 €, 2500 € bzw. 4000 € beträgt.
	c)	Die Konsumquote ist der Anteil des Einkommens das für den Konsum aufgewendet wird. (Konsumquote = Konsum / Einkommen) Bestimmen Sie die Konsumquote für die Einkommen aus b). Welcher allgemeiner Zusammenhang besteht zwischen Konsumquote und Einkommen?
	d)	Der Einkommenszuwachs betrage dx. Wie viel Prozent des Einkommenszuwachses wird für den Konsum ausgegeben?
	e)	Welche Funktion S beschreibt die Sparleistung in Abhängigkeit vom Einkommen. Stellen Sie die Funktion K und S graphisch dar. Welche Bedeutung hat die Nullstelle von S?

A2 Ausführliche Lösung

a) unabhängige Variable: $x = \text{Einkommen}$

abhängige Variable $y = K(x) = \text{Konsumausgaben}$ (linearer Zusammenhang)

$\Rightarrow K(x) = a_1 x + a_0$

Aus den gegebenen Bedingungen folgt: $P_1(1000\,|\,900)\,;\,P_2(1800\,|\,1460)$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1460 - 900}{1800 - 1000} = \frac{560}{800} = 0,7 \Rightarrow K(x) = 0,7x + a_0$$

$P_1(1000\,|\,900):\quad K(1000) = 0,7 \cdot 1000 + a_0 = 900 \Rightarrow a_0 = 200$

$\Rightarrow \underline{\underline{K(x) = 0,7x + 200}}$

A2 Ausführliche Lösung

b) $K(800) = 0,7 \cdot 800 + 200 = 760 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(800\,|\,760)}}$

$K(2500) = 0,7 \cdot 2500 + 200 = 1950 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(2500\,|\,1950)}}$

$K(4000) = 0,7 \cdot 4000 + 200 = 3000 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(4000\,|\,3000)}}$

A2 **Ausführliche Lösung**

c)

$$\text{Konsumquote} = \frac{\text{Konsum}}{\text{Einkommen}} = \frac{K(x)}{x}$$

$$\text{Einkommen } 800\text{ €} \Rightarrow \text{Konsumquote} = \frac{760}{800} = 0{,}95 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{95\%}}$$

$$\text{Einkommen } 2500\text{ €} \Rightarrow \text{Konsumquote} = \frac{1950}{2500} = 0{,}78 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{78\%}}$$

$$\text{Einkommen } 4000\text{ €} \Rightarrow \text{Konsumquote} = \frac{3000}{4000} = 0{,}75 \mathrel{\hat{=}} \underline{\underline{75\%}}$$

Allgemeiner Zusammenhang:

$$\text{Konsumquote} = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}7x + 200}{x} = 0{,}7 + \frac{200}{x}$$

Bemerkung:
Je höher das Einkommen, desto mehr nähert sich die Konsumquote dem Wert 0,7, das bedeutet, mindestens 70% des verfügbaren Einkommens wird für den Konsum ausgegeben. Der Rest kann gespart werden.

A2 **Ausführliche Lösung**

d) Anastz:

$$\text{altes Einkommen} \quad x \Rightarrow \quad K(x) = 0{,}7x + 200$$

$$\text{neues Einkommen} \quad x + dx \Rightarrow K(x+dx) = 0{,}7(x+dx) + 200$$

$$\text{Einkommenszunahme } x + dx - x \Rightarrow K(x+dx) - K(x)$$

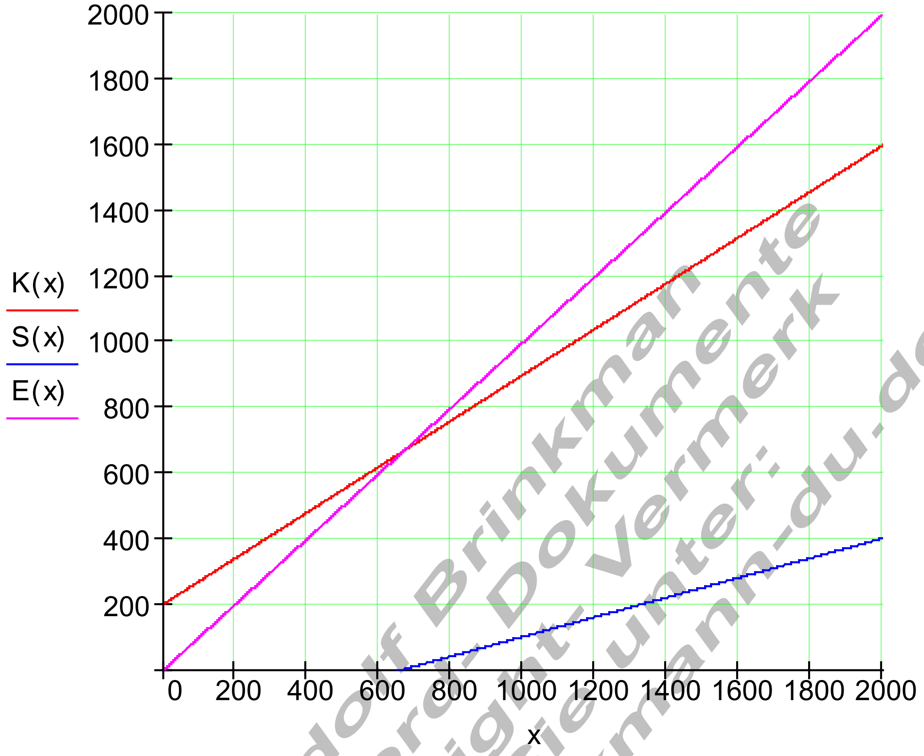
$$\Leftrightarrow 0{,}7(x+dx) + 200 - (0{,}7x + 200) = \underline{\underline{0{,}7dx}}$$

Folgerung:
70% des Einkommenszuwachses wird für den Konsum ausgegeben.
Das entspricht der Steigung von K(x).

A2 Ausführliche Lösung

e) Alles was nicht konsumiert wird, wird gespart.

$S(x) = x - K(x) = x - (0{,}7x + 200) = \underline{\underline{0{,}3x - 200}}$



Es bedeuten: $K(x) = \text{Konsumfunktion}$; $S(x) = \text{Sparfunktion}$; $E(x) = \text{Einkommen}$

Nullstelle von $S(x)$:

$S(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}3x - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 666{,}\overline{6}$

Bedeutung der Nullstelle:
Erst ab einem Einkommen von 666,67 € kann gespart werden.
Die 666,67 € bilden in diesem Modell das Existenzminimum.
Unterhalb des Existenzminimums werden Schulden gemacht, denn Mensch muss ja irgendwo von leben.

A3 Aufgabe

Ein Eisenträger hat die Länge $l_0 = 85\text{ m}$ und einen Ausdehnungskoeffizienten

$\alpha = \dfrac{12 \cdot 10^{-6}}{K}$ $(K \mathrel{\hat{=}} \text{Grad Kelvin})$

Ein Funktionsterm $l(\Delta t) = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t$ beschreibt die Länge des Eisenträgers in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz Δt in K.

a) Geben Sie den Funktionsterm für die Länge dieses Eisenträgers an.

b) Berechnen Sie die Länge des Eisenträgers für folgende Temperaturänderungen:
30 K ; 60 K ; 40 K.

c) Wie lang müsste ein Eisenträger sein, der bei einer Temperaturerhöhung um 25 K eine Längenänderung von 25 mm erfährt?

A3 Ausführliche Lösung

a) $l(\Delta t) = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t = 85\,m + \frac{12 \cdot 10^6}{K} \cdot 85\,m \cdot \Delta t = \underline{\underline{85\,m + 0{,}00102 \cdot \Delta t \cdot \frac{m}{K}}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) $\Delta t = 30\,K: \quad \Rightarrow l(30) = 85\,m + 0{,}00102 \cdot 30 \cdot m = \underline{\underline{85{,}0306\,m}}$

$\Delta t = 60\,K: \quad \Rightarrow l(60) = 85\,m + 0{,}00102 \cdot 60 \cdot m = \underline{\underline{85{,}0612\,m}}$

$\Delta t = 40\,K: \quad \Rightarrow l(40) = 85\,m + 0{,}00102 \cdot 40 \cdot m = \underline{\underline{85{,}0408\,m}}$

A3 Ausführliche Lösung

c) Längenänderung: $\Delta l = 25\,mm = 0{,}025\,m$ Temperaturänderung: $\Delta t = 25\,K$

$l(\Delta t) = l_0 + 0{,}025\,m$

$l(\Delta t) = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t \quad \Rightarrow l_0 + 0{,}025\,m = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t \Leftrightarrow l_0 = \frac{0{,}025\,m}{\alpha \cdot \Delta t}$

$l_0 = \frac{0{,}025\,m}{\alpha \cdot \Delta t} = \frac{0{,}025\,m}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 25} = \frac{25 \cdot 10^{-3}\,m}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 25} = \frac{10^{-3}\,m}{12 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{12} \cdot 10^3 = \underline{\underline{83{,}\overline{3}\,m}}$

Ein Eisenträger der Länge 83,33 m dehnt sich bei einer Temperaturerhöhung von 25 K um 25 mm aus.

A4 Aufgabe

Der elektrische Widerstand eines Leiters verursacht einen Spannungsabfall. Die Spannung U, die dem Kunden zur Verfügung steht, wird mit folgender Formel berechnet:

$U(I) = U_0 - R \cdot I$ Daten: $U_0 = 2000\,V;\ R = 1{,}17\,\Omega$

Dabei bedeuten:

U_0 = Generatorspannung in Volt R = Leitungswiderstand in Ohm und

$U_v = R \cdot I$ = Spannungsabfall in Volt

a) Welche Spannung steht dem Verbraucher bei einem Strom von 25 A zur Verfügung? Wie hoch ist der Spannungsabfall?

b) Welche physikalische Bedeutung hat die Nullstelle von U ? Wie groß muss dafür der Strom sein?

A4 Ausführliche Lösung

a) Rechnung ohne Einheiten: $U(I) = U_0 - R \cdot I = 2000 - 1{,}17 \cdot I$

Verbraucherspannung bei $I = 25$ A : $U(25) = 2000 - 1{,}17 \cdot 25 = \underline{\underline{1970{,}75}}$ (Volt)

Spannungsabfall bei $I = 25$ A : $U_V = 1{,}17 \cdot 25 = \underline{\underline{29{,}25}}$ (Volt)

A4 Ausführliche Lösung

b) $U(I) = 2000 - 1{,}17 \cdot I = 0 \Leftrightarrow I = \frac{2000}{1{,}17} = \underline{\underline{1709{,}4}}$ (Ampere)

Bei einem Stromfluss von 1709,4 A kommt beim Verbraucher keine Spannung mehr an.