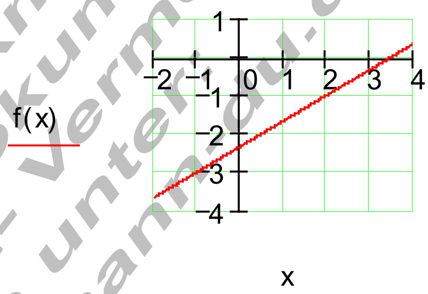
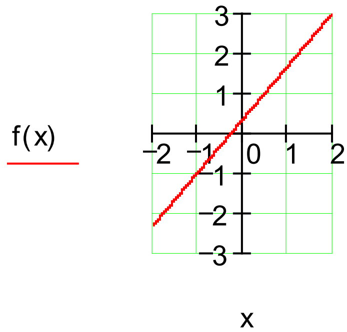
Lösungen lineare Funktionen Teil VIII

Ausführliche Lösungen:

A1	Aufgabe					
1.	Eine Gerade K_f ist gegeben durch ihre Gleichung. Stellen Sie die Funktionsgleichung $f(x) = a_1x + a_0$ auf und zeichnen Sie die Graphen jeweils in ein Koordinatensystem.					
	a)	$K_f : 2x - 3y = 7$	b)	$K_f : 3y - 4x - 1 = 0$	c)	$K_f : y - 95x = 0$
	d)	$K_f : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$	e)	$K_f : -\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$	f)	$K_f : y = \sqrt{3}\,(x-2)$

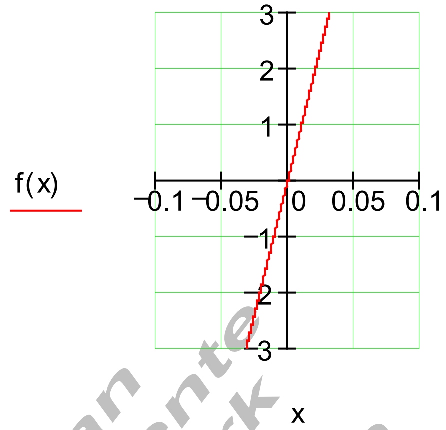
A1	Ausführliche Lösung		
	a)	$K_f : 2x - 3y = 7$ $\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$	

A1	Ausführliche Lösung		
	b)	$K_f : 3y - 4x - 1 = 0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$	

A1 **Ausführliche Lösung**

c)

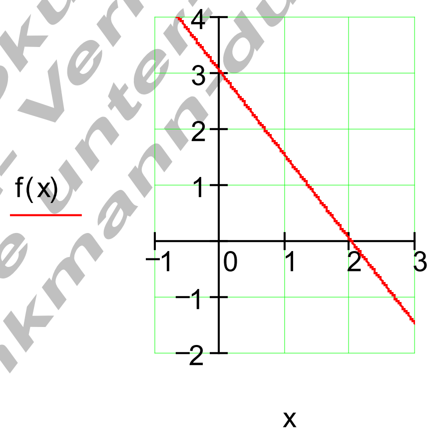
$$K_f : y - 95x = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = 95x$$



A1 **Ausführliche Lösung**

d)

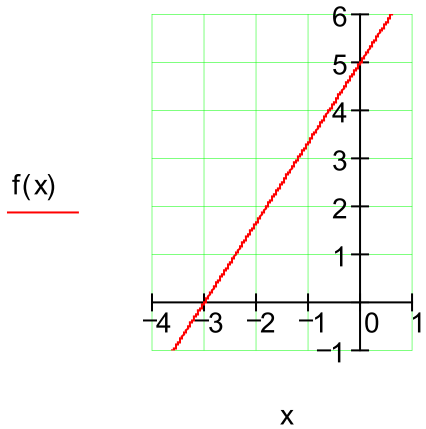
$$K_f : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$$



A1 **Ausführliche Lösung**

e)

$$K_f : -\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{3}x + 5$$

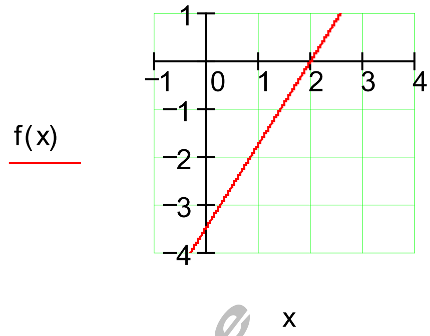


A1 Ausführliche Lösung

f)

$K_f : y = \sqrt{3}\left(x-2\right)$

$\Rightarrow f(x) = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$



A2 Aufgabe

Gegeben ist die lineare Funktion f(x) mit	$f(x) = 1{,}25x + 1{,}5 \quad x \in \mathbb{R}.$

a) Berechnen Sie die Funktionswerte: $f(0)$; $f(-1{,}5)$; $f(0{,}7)$; $f(\pi)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f(u)$

b) An welcher Stelle hat die Funktion den Wert -5?

c) Für welche Argumente sind die Funktionswerte positiv?

d) Zeigen Sie: $f\left(u+2\right) - f(u)$ ist unabhängig von u.

A2 Ausführliche Lösung

a) Ergebnisse gerundet auf 3 Stellen: $f(x) = 1{,}25x + 1{,}5$

$f(0) = 1{,}25 \cdot 0 + 1{,}5 = 1{,}5$ $\qquad f\left(-1{,}5\right) = 1{,}25 \cdot \left(-1{,}5\right) + 1{,}5 = -0{,}375$

$f(0{,}7) = 1{,}25 \cdot 0{,}7 + 1{,}5 = 2{,}375$ $\qquad f\left(\pi\right) = 1{,}25 \cdot \pi + 1{,}5 = 5{,}427$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1{,}25 \cdot \frac{\pi}{2} + 1{,}5 = 3{,}463$ $\qquad f(u) = 1{,}25u + 1{,}5$

A2 Ausführliche Lösung

b) $f(x) = 1{,}25x + 1{,}5 = -5 \Rightarrow 1{,}25x + 1{,}5 = -5 \Rightarrow x = -5{,}2$

$f(x) = -5$ für $\underline{\underline{x = -5{,}2}}$

A2 Ausführliche Lösung

c) $f(x) = 1{,}25x + 1{,}5 > 0$

$\Rightarrow 1{,}25x + 1{,}5 > 0 \mid -1{,}5$

$\Leftrightarrow 1{,}25x > -1{,}5 \mid : 1{,}25$

$\Leftrightarrow x > -1{,}2$

$\underline{\underline{f(x) > 0 \text{ für } x > -1{,}2}}$

A2 Ausführliche Lösung

d) $f(u+2) = 1{,}25\left(u+2\right) + 1{,}5 = 1{,}25u + 2{,}5 + 1{,}5$

$f(u) = 1{,}25u + 1{,}5$

$f(u+2) - f(u) = 1{,}25u + 2{,}5 + 1{,}5 - 1{,}25u - 1{,}5 = 2{,}5$ ist von u unabhängig

A3	**Aufgabe**					
	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte folgender linearer Funktionen und zeichnen Sie den Graphen in ein Koordinatensystem.					
	a)	$f(x)=-\frac{3}{2}x+4$	b)	$f(x)=-4x-3,5$	c)	$f(x)=\frac{3}{7}x-3$
	d)	$f(x)=\frac{x}{6}+\frac{5}{6}$	e)	$f(x)=2(x+1,25)$	f)	$f(x)=-\frac{8}{3}x+\frac{5}{4}$

A3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x)=-\frac{3}{2}x+4$$

$$f(0)=4$$

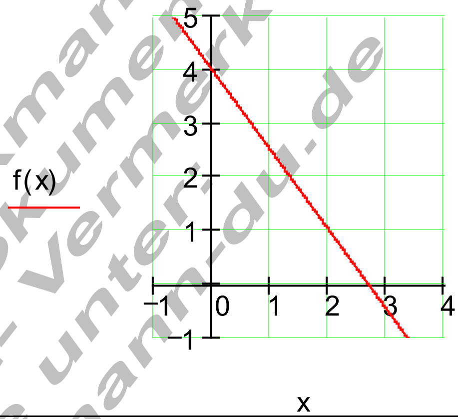
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,4)}}$$

$$f(x_s)=-\frac{3}{2}x_s+4=0$$

$$\Rightarrow x_s=\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(\frac{8}{3}\,|\,0\right)}}$$

$f(x)=-\frac{3}{2}x+4$



A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=-4x-3,5$$

$$f(0)=-3,5$$

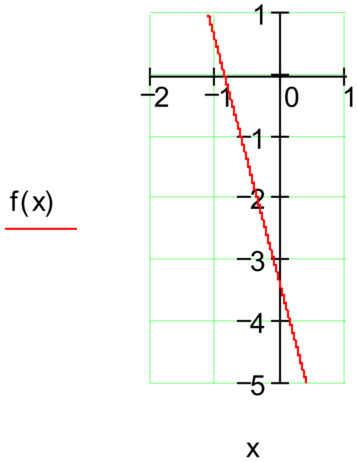
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-3,5)}}$$

$$f(x_s)=-4x-3,5=0$$

$$\Rightarrow x_s=-\frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(-\frac{7}{8}\,|\,0\right)}}$$

$f(x)=-4x-3,5$



A3 Ausführliche Lösung

c)

$f(x)=\frac{3}{7}x-3$

$f(0)=-3$

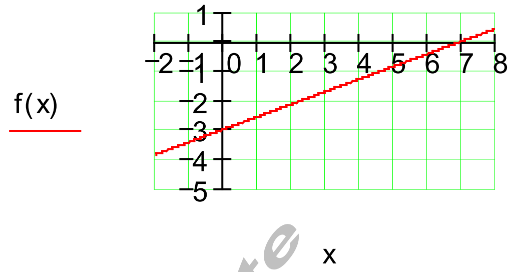
$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-3)}}$

$f(x_s)=\frac{3}{7}x-3=0$

$\Rightarrow x_s=7$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_x(7\,|\,0)}}$

$f(x)=\frac{3}{7}x-3$



A3 Ausführliche Lösung

d)

$f(x)=\frac{x}{6}+\frac{5}{6}$

$f(0)=\frac{5}{6}$

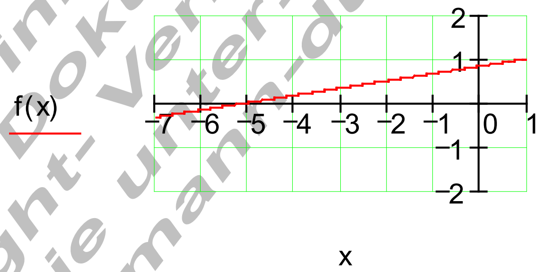
$\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,\frac{5}{6}\right)}}$

$f(x_s)=\frac{x}{6}+\frac{5}{6}=0$

$\Rightarrow x_s=-5$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_x(-5\,|\,0)}}$

$f(x)=\frac{x}{6}+\frac{5}{6}$



A3 Ausführliche Lösung

e)

$f(x)=2(x+1{,}25)=2x+2{,}5$

$f(0)=2{,}5$

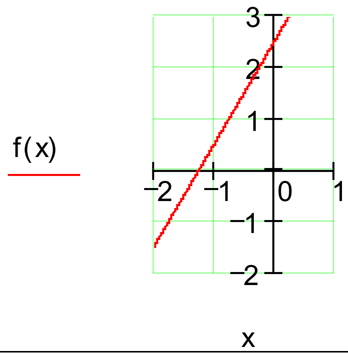
$\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,2{,}5)}}$

$f(x_s)=2x+2{,}5=0$

$\Rightarrow x_s=-\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(-\frac{5}{4}\,|\,0\right)}}$

$f(x)=2(x+1{,}25)=2x+2{,}5$



A3 Ausführliche Lösung

f)

$$f(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4}$$

$$f(0) = \frac{5}{4}$$

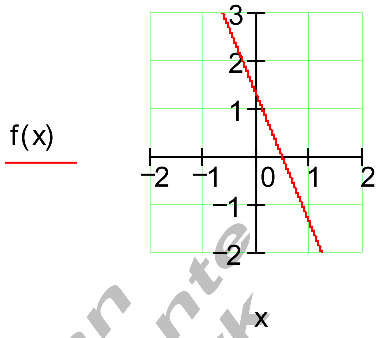
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{5}{4}\right)}}$$

$$f(x_s) = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x_s = \frac{15}{32}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(\frac{15}{32} \mid 0\right)}}$$

$$f(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4}$$



A4 Aufgabe

Bestimmen Sie die Gleichung der Parallelen zur Geraden g mit $g(x) = -2x + 4$ durch den Punkt $P(-3 \mid 1)$.

A4 Ausführliche Lösung

$g(x) = -2x + 4$ die Parallele h(x) soll durch $P(-3 \mid 1)$ gehen.

Die Parallele hat die gleiche Steigung $\Rightarrow h(x) = -2x + a_0$

$P(-3 \mid 1)$: $h(-3) = -2 \cdot (-3) + a_0 = 1 \Rightarrow a_0 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{h(x) = -2x - 5}}$

A5 Aufgabe

Zeichnen Sie die Gerade mit der Funktionsgleichung f(x) = 1,5x in ein Koordinatensystem. Zeichnen Sie ohne weitere Hilfsmittel folgende Gerade hinzu.

$g(x) = 1{,}5(x-2)$; $h(x) = 1{,}5x - 2$; $i(x) = 1{,}5(-x)$; $j(x) = 1{,}5(2x)$

A5 Ausführliche Lösung

$f(x) = 1{,}5x$

$g(x) = 1{,}5(x-2)$

Verschiebung um 2 nach rechts

$h(x) = 1{,}5x - 2$

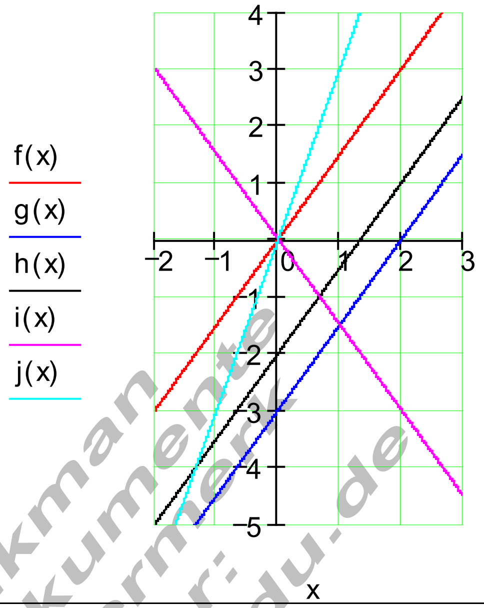
Verschiebung um 2 nach unten

$i(x) = 1{,}5(-x) = -1{,}5x$

Spiegelung an der y – Achse

$j(x) = 1{,}5(2x) = 3x$

doppelte Steigung



A6 Aufgabe

Die Firma „Big Beauty“ produziert den Lippenstift „Amore“. Die bei der Produktion entstehenden Kosten K sind von der hergestellten Stückzahl abhängig. Bei der Produktion von x = 100 Stück entstehen Kosten von 385 €, bei der Produktion von
x = 200 Stück entstehen Kosten von 410 €. Zwischen der Stückzahl und den entstehenden Kosten bestehe ein linearer Zusammenhang.

a)	Bestimmen Sie die Kostenfunktion.
b)	Wie hoch sind die Stückkosten bei einer Produktion von x = 140 Stück?
c)	Gegen welchen Wert streben die Stückkosten bei sehr hohen Stückzahlen?
d)	Bei welcher Menge x liegt die Gewinnschwelle, wenn ein Verkaufspreis von 5,20 € pro Lippenstift erzielt wird?
e)	Zeichnen Sie die Graphen von K(x) und E(x) in ein Koordinatensystem.

A6 Ausführliche Lösung

a) $P_1(100\,|\,385)\,;\,P_2(200\,|\,410)\,;\,\text{Kostenfunktion}: K(x) = a_1x + a_0$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{410-385}{200-100} = 0{,}25 \Rightarrow K(x) = 0{,}25x + a_0$$

$$P_1(100\,|\,385):\quad K(100) = 0{,}25\cdot 100 + a_0 = 385 \Rightarrow a_0 = 360$$

$$\Rightarrow \text{Kostenfunktion}: \underline{\underline{K(x) = 0{,}25x + 360}}$$

A6 Ausführliche Lösung

b) Kosten für 140 Stück: $K(140) = 0{,}25\cdot 140 + 360 = 395$

$$\text{Stückkosten} = \frac{\text{Kosten}}{\text{Stück}} = \frac{K(x)}{x} = \frac{K(140)}{140} = \frac{395}{140} = \underline{\underline{2{,}82}}$$

Bei einer Produktion von 140 Stück betragen die Stückkosten 2,82 €.

A6 Ausführliche Lösung

c)

$$\text{Stückkosten} = \frac{\text{Kosten}}{\text{Stück}} = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}25x + 360}{x} = 0{,}25 + \frac{360}{x}$$

Für sehr große Stückzahlen wird der Term $\frac{360}{x}$ immer kleiner,

so dass die Stückkosten sich immer mehr dem Wert $\underline{\underline{0{,}25\ €}}$ nähern.

Mathematisch schreibt man das so: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{K(x)}{x} = 0{,}25$

A6 Ausführliche Lösung

d) Gewinnschwelle bedeutet, der Erlös E(x) ist gerade so groß wie die Kosten K(x).

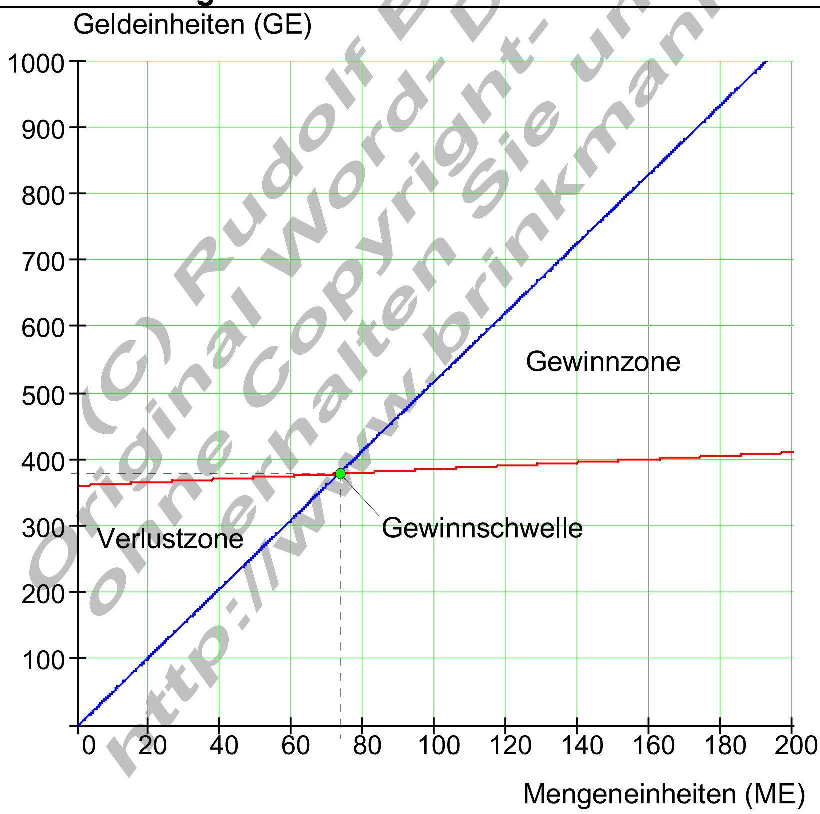
$E(x) = p \cdot x = 5{,}2x \quad K(x) = 0{,}25x + 360$

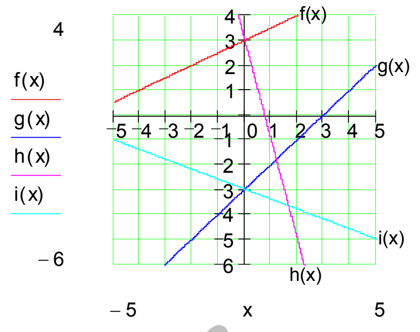
$E(x) = K(x) \Leftrightarrow 5{,}2x = 0{,}25x + 360 \Leftrightarrow x = \frac{360}{4{,}95} \approx \underline{\underline{73}}$

Ab einer verkauften Menge von 73 Lippenstiften wird Gewinn gemacht.

A6 Ausführliche Lösung

e)



A7	**Aufgabe**	
	Welche Gleichung gehört zu welcher Geraden? Begründen Sie Ihre Entscheidung. $g_1: \quad f(x) = -4x + 3$ $g_2: \quad 5y - 2x + 15 = 0$ $g_3: \quad f(x) = x - 3$ $g_4: \quad f(x) = 0,5x + 3$	

A7	**Ausführliche Lösung**
	$g_1: h(x) = -4x + 3$ wegen $P_y(0\,\vert\,3)$ und $a_1 = -4$ $g_2: y = \frac{2}{5}x - 3$ kommt in der Grafik nicht vor $g_{3:}\ g(x) = x - 3$ wegen $P_y(0\,\vert\,-3)$ und $a_1 = 1$ $g_{4:}\ f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ wegen $P_y(0\,\vert\,3)$ und $a_1 = \frac{1}{2}$