Lösungen Quadratische Gleichungen V

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$x^2-2x-15=0 \Rightarrow L=\{5\,;-3\}$
	b)	$x-2=3x^2+4 \Rightarrow L=\{\ \}$
	c)	$13x^2-17x+20=18+10x^2-10x \Rightarrow L=\left\{2\,;\frac{1}{3}\right\}$

E2	Ergebnis
	$4x^2=12x \Rightarrow 4x^2-12x=0 \Leftrightarrow 4x(x-3)=0 \Rightarrow L=\{0\,;3\}$ Division durch x ist nur erlaubt für $x \neq 0$

E3	Ergebnisse	
	a)	$ax^2-6x=0 \Rightarrow$ für $a=0$: $L=\{0\}$ für $a\neq 0$: $L=\left\{0\,;\frac{6}{a}\right\}$
	b)	$x^2-2x=(2-a)x^2 \Rightarrow$ für $a=1$: $L=\{0\}$ für $a\neq 1$: $L=\left\{0:\frac{2}{a-1}\right\}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$x^2+8x+7=0 \Rightarrow L=\{-1\,;-7\}$
	b)	$x^2-6x+9=0 \Rightarrow L=\{3\}$
	c)	$x^2-4x+13=0 \Rightarrow L=\{\ \}$
	d)	$x^2+2x-1=0 \Rightarrow L=\{-1+\sqrt{2}\,;-1-\sqrt{2}\}$
	e)	$x^2-4x+5=0 \Rightarrow L=\{\ \}$
	f)	$\frac{3x^2-4}{2x+4}=x+\frac{1}{2} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ $L=\{6\,;-1\}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$\frac{x-2}{15}=\frac{1}{x} \Rightarrow D=\mathbb{R}^* \quad L=\{5\,;-3\}$
	b)	$\frac{1}{x+3}=x+\frac{1}{3} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-3\} \quad L=\left\{0\,;-\frac{10}{3}\right\}$
	c)	$3=\frac{2}{x}-2x \Rightarrow D=\mathbb{R}^* \quad L=\left\{\frac{1}{2}\,;-2\right\}$
	d)	$x+\frac{1}{6x}+\frac{5}{6}=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}^* \quad L=\left\{-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\right\}$
	e)	$\frac{21}{2x}-\frac{5}{2}x=-4 \Rightarrow D=\mathbb{R}^* \quad L=\left\{3\,;-\frac{7}{5}\right\}$
	f)	$\frac{13}{x-2}+\frac{16}{x+1}=\frac{30}{x} \Rightarrow D=\mathbb{R}^*\setminus\{2\,;-1\} \quad L=\{-4\,;15\}$

E6	Ergebnisse	
	a)	$\frac{2x+1}{3x-4}=\frac{x+6}{4x+1} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3}\,;-\frac{1}{4}\right\} \quad L=\{\ \}$
	b)	$\frac{x+5}{2}-\frac{6}{x-1}=2 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\} \quad L=\left\{\sqrt{13}\,;-\sqrt{13}\right\}$
	c)	$\frac{2}{a}=a+1 \Rightarrow D=\mathbb{R}^* \quad L=\{1;-2\}$
	d)	$3-\frac{1}{x}=\frac{2}{x-4} \Rightarrow D=\mathbb{R}^*\setminus\{4\} \quad L=\left\{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{59}{12}}\,;\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{59}{12}}\right\}$
	e)	$\frac{x^2-2}{x^2-2x}=\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2} \Rightarrow D=\mathbb{R}^*\setminus\{2\} \quad L=\{-1\}$
	f)	$\frac{2x-8}{x-1}+\frac{2x+6}{x-9}=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1;9\} \quad L=\{\ \}$

E7	Ergebnisse	
	a)	$\frac{x+4}{x-1}+\frac{x+3}{x-9}=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1;9\} \quad L=\left\{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{321}{16}}\,;\,\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{321}{16}}\right\}$
	b)	$x^2-1=\frac{(x-1)^3}{x} \Rightarrow D=\mathbb{R}^* \quad L=\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$
	c)	$\frac{7-2v^2}{v-2}=v+1+\frac{3v}{v-2} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{2\} \quad L=\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{28}\,;\,-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{28}\right\}$
	d)	$\frac{36}{m+1}-15=\frac{4}{m} \Rightarrow D=\mathbb{R}^*\setminus\{-1\} \quad L=\left\{\frac{4}{5};\frac{1}{3}\right\}$
	e)	$\frac{a^2+2a+1}{(a-3)(a-1)}=\frac{a+1}{a-1}+\frac{a+2}{a-3} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{3;1\} \quad L=\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33}\,;\,\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33}\right\}$
	f)	$\frac{x-1}{x-2}-7=-\frac{x+3}{x-2} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{2\} \quad L=\left\{\frac{16}{5}\right\}$

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**			
	Berechnen Sie folgende Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{Q}$			
	a)	$x^2 - 2x - 15 = 0$	b)	$x - 2 = 3x^2 + 4$
	c)	$13x^2 - 17x + 20 = 18 + 10x^2 - 10x$		

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	$x^2 - 2x - 15 = 0$ $p = -2 \Rightarrow -\frac{p}{2} = 1 \quad q = -15$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 15 = 16 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{15} = 4$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Big\vert \quad x_1 = 1 + 4 = \underline{\underline{5}} \quad x_2 = 1 - 4 = \underline{\underline{-3}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = \{5\,;\,-3\}}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	$x - 2 = 3x^2 + 4 \mid -x + 2$ $\Leftrightarrow 0 = 3x^2 - x + 6 \Leftrightarrow 3x^2 - x + 6 = 0 \mid :3$ $\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{3}x + 2 = 0$ $p = -\frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{p}{2} = \frac{1}{6} \quad q = 2$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{36} - 2 = \frac{1}{36} - \frac{72}{36} = -\frac{71}{36} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{L = \{\ \}}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$13x^2 - 17x + 20 = 18 + 10x^2 - 10x \mid -18 - 10x^2 + 10x$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \mid :3 \Leftrightarrow x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ $p = -\frac{7}{3} \Rightarrow -\frac{p}{2} = \frac{7}{6} \quad q = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{49}{36} - \frac{2}{3} = \frac{49}{36} - \frac{24}{36} = \frac{25}{36} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Big\vert \quad x_1 = \frac{7}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = \underline{\underline{2}} \quad x_2 = \frac{7}{6} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{2\,;\,\frac{1}{3}\right\}}}$

A2	**Aufgabe**
	Gegeben ist die Gleichung $4x^2 = 12x$. Marion dividiert beide Seiten durch x und erhält $x = 3$ als Lösung. Nehmen Sie dazu Stellung.

A2	Ausführliche Lösung
	$4x^2 = 12x \mid -12 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x = 0$ $\Leftrightarrow 4x(x-3) = 0$ Satz vom Nullprodukt $4x = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0$ $4x = 0 \mid :4 \Leftrightarrow x_1 = \underline{\underline{0}}$ $x - 3 = 0 \mid +3 \Leftrightarrow x_2 = \underline{\underline{3}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{L = \{0;3\}}}$ Division durch x ist nur erlaubt für x ungleich Null. Denn durch Null darf man nicht dividieren.

A3	**Aufgabe**			
	Bestimmen Sie die Anzahl von Lösungen in Abhängigkeit von a.			
	a)	$ax^2 - 6x = 0$	b)	$x^2 - 2x = (2-a)x^2$

A3	Ausführliche Lösung Berechnen Sie die Lösungsmenge für a = 0 und für a ungleich Null.	
	a)	$ax^2 - 6x = 0 \Rightarrow$ für $a = 0$: $-6x = 0 \mid :(-6) \Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\}}}$ $ax^2 - 6x = 0 \Rightarrow$ für $a \neq 0$: $x(ax-6) = 0$ Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt: $x_1 = \underline{\underline{0}} \quad \vee \quad ax - 6 = 0 \mid +6 \Leftrightarrow ax = 6 \mid :a \Leftrightarrow x_2 = \underline{\underline{\frac{6}{a}}} \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{0;\frac{6}{a}\right\}}}$

A3	Ausführliche Lösung Berechnen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von a.	
	b)	$x^2 - 2x = (2-a)x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2x^2 - ax^2 \mid -2x^2 + ax^2$ $\Leftrightarrow -x^2 + ax^2 - 2x = 0$ $\Leftrightarrow x(ax - x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow x[x(a-1) - 2] = 0$ Fall 1: $a = 1 \Rightarrow x[x(1-1) - 2] = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \mid :(-2) \Leftrightarrow x = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\}}}$ Fall 2: $a \neq 1 \Rightarrow x[x(a-1) - 2] = 0$ Satz vom Nullprodukt $x_1 = \underline{\underline{0}} \quad \vee \quad x(a-1) - 2 = 0 \mid +2$ $\Leftrightarrow x(a-1) = 2 \mid :(a-1)$ $\Leftrightarrow x_2 = \underline{\underline{\frac{2}{(a-1)}}} \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{0;\frac{2}{a-1}\right\}}}$

A4	**Aufgabe**					
	Berechnen Sie folgende Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$					
	a)	$x^2+8x+7=0$	b)	$x^2-6x+9=0$	c)	$x^2-4x+13=0$
	d)	$x^2+2x-1=0$	e)	$x^2-4x+5=0$	f)	$\frac{3x^2-4}{2x+4}=x+\frac{1}{2}$

A4	Ausführliche Lösung	
	a)	$x^2+8x+7=0$ $p=8\Rightarrow -\frac{p}{2}=-4 \quad q=7$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16-7=9\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{9}=3$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\left\vert \begin{array}{l} x_1=-4+3=\underline{\underline{-1}} \\ x_2=-4-3=\underline{\underline{-7}} \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1;-7\}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	b)	$x^2-6x+9=0$ $p=-6\Rightarrow -\frac{p}{2}=3 \quad q=9$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0\Rightarrow$ nur eine Lösung $x=-\frac{p}{2}=3\Rightarrow \underline{\underline{L=\{3\}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	c)	$x^2-4x+13=0$ $p=-4\Rightarrow -\frac{p}{2}=2 \quad q=13$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-13=-9<0\Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$

A4 Ausführliche Lösung

d) $x^2+2x-1=0$

$$p=2\Rightarrow -\frac{p}{2}=-1 \quad q=-1$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+1=2\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\underline{\underline{-1+\sqrt{2}}} \\ x_2=\underline{\underline{-1-\sqrt{2}}} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-1+\sqrt{2}\,;-1-\sqrt{2}\right\}}}$$

A4 Ausführliche Lösung

e) $x^2-4x+5=0$

$$p=-4\Rightarrow -\frac{p}{2}=2 \quad q=5$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-5=-1<0\Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht -2 sein.

f) $\frac{3x^2-4}{2x+4}=x+\frac{1}{2}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$$\frac{3x^2-4}{2(x+2)}=x+\frac{1}{2}$$

Hauptnenner : $2(x+2)$

$$\Rightarrow \frac{3x^2-4}{2(x+2)}=\frac{2x(x+2)}{2(x+2)}+\frac{x+2}{2(x+2)}\ |\cdot 2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4=2x(x+2)+x+2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4=2x^2+4x+x+2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4=2x^2+5x+2\ |-2x^2-5x-2$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-6=0$$

$$p=-5\Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{5}{2} \quad q=-6$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}+6=\frac{25}{4}+\frac{24}{4}=\frac{49}{4}\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=\frac{12}{2}=\underline{\underline{6}} \\ x_2=\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{2}{2}=\underline{\underline{-1}} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \underline{\underline{L=\{6\,;-1\}}}$$

A5	**Aufgabe**			
	Bestimmen Sie bei den folgenden Aufgaben vor der Lösungsmenge jeweils auch die Definitionsmenge.			
	a)	$\frac{x-2}{15}=\frac{1}{x}$	b)	$\frac{1}{x+3}=x+\frac{1}{3}$
	c)	$3=\frac{2}{x}-2x$	d)	$x+\frac{1}{6x}+\frac{5}{6}=0$
	e)	$\frac{21}{2x}-\frac{5}{2}x=-4$	f)	$\frac{13}{x-2}+\frac{16}{x+1}=\frac{30}{x}$

A5	Ausführliche Lösung Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null sein.		
	a)	$\frac{x-2}{15}=\frac{1}{x}\Rightarrow D=\mathbb{R}^*$ $\frac{x-2}{15}=\frac{1}{x}\,\vert\cdot x$ $\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{15}=1\,\vert\cdot 15$ $\Leftrightarrow x^2-2x=15\,\vert-15$ $\Leftrightarrow x^2-2x-15=0$	$p=-2\Rightarrow -p/2=1 \quad q=-15$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+15=16$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{16}=4$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\quad x_1=1+4=\underline{\underline{5}}$, $\quad x_2=1-4=\underline{\underline{-3}}$ $\underline{\underline{L=\{5;-3\}}}$

A5	Ausführliche Lösung Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht -3 sein.		
	b)	$\frac{1}{x+3}=x+\frac{1}{3}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ $\frac{1}{x+3}=x+\frac{1}{3}\,\vert\cdot(x+3)$ $\Leftrightarrow 1=x(x+3)+\frac{1}{3}(x+3)$ $\Leftrightarrow 1=x^2+3x+\frac{1}{3}x+1\,\vert-1$ $\Leftrightarrow 0=x^2+\frac{10}{3}x$ x ausklammern $\Leftrightarrow x\left(x+\frac{10}{3}\right)=0$	Satz vom Nullprodukt: $x=0 \quad\vee\quad x+\frac{10}{3}=0$ $x=0\Rightarrow x_1=\underline{\underline{0}}$ $x+\frac{10}{3}=0\,\vert-\frac{10}{3}$ $\Leftrightarrow x=-\frac{10}{3}\Rightarrow x_2=\underline{\underline{-\frac{10}{3}}}$ $\underline{\underline{L=\left\{0;-\frac{10}{3}\right\}}}$

A5 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null sein.

c)

$$3=\frac{2}{x}-2x\Rightarrow D=\mathbb{R}^*$$

$$3=\frac{2}{x}-2x\;|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3x=2-2x^2\;|-3x$$

$$\Leftrightarrow 0=-2x^2-3x+2\;|:(-2)$$

$$\Leftrightarrow 0=x^2+\frac{3}{2}x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{3}{2}x-1=0$$

$$p=\frac{3}{2}\Rightarrow -\frac{p}{2}=-\frac{3}{4}\qquad q=-1$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{16}+1=\frac{9}{16}+\frac{16}{16}=\frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x_1=-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{2}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$x_2=-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=-\frac{8}{4}=\underline{\underline{-2}}$$

$$\underline{\underline{L=\left\{\frac{1}{2};-2\right\}}}$$

A5 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null sein.

d)

$$x+\frac{1}{6x}+\frac{5}{6}=0\Rightarrow D=\mathbb{R}^*$$

$$x+\frac{1}{6x}+\frac{5}{6}=0\;|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{6}+\frac{5}{6}x=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$$

$$p=\frac{5}{6}\Rightarrow -\frac{p}{2}=-\frac{5}{12}\qquad q=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{144}-\frac{1}{6}=\frac{25}{144}-\frac{24}{144}=\frac{1}{144}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{1}{144}}=\frac{1}{12}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x_1=-\frac{5}{12}+\frac{1}{12}=-\frac{4}{12}=\underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

$$x_2=-\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=-\frac{6}{12}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right\}}}$$

A5 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null sein.

e) $\frac{21}{2x}-\frac{5}{2}x=-4 \Rightarrow D=\mathbb{R}^*$

$$\frac{21}{2x}-\frac{5}{2}x=-4 \mid \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{2}-\frac{5}{2}x^2=-4x \mid +4x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}x^2+4x+\frac{21}{2}=0 \mid \cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{8}{5}x-\frac{21}{5}=0$$

$$p=-\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{4}{5} \qquad q=-\frac{21}{5}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{16}{25}+\frac{21}{5}=\frac{16}{25}+\frac{105}{25}=\frac{121}{25}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{121}{25}}=\frac{11}{5}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{4}{5}+\frac{11}{5}=\frac{15}{5}=\underline{\underline{3}} \\ x_2=\frac{4}{5}-\frac{11}{5}=\underline{\underline{-\frac{7}{5}}} \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{L=\left\{3\,;-\frac{7}{5}\right\}}}$$

A5 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null, nicht 2 und auch nicht -1 sein.

f) $\frac{13}{x-2}+\frac{16}{x+1}=\frac{30}{x} \Rightarrow D=\mathbb{R}^* \setminus \{2\,;-1\}$

Hauptnenner : $x(x+1)(x-2)$

$$\Rightarrow \frac{13x(x+1)}{x(x+1)(x-2)}+\frac{16x(x-2)}{x(x+1)(x-2)}=\frac{30(x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13x(x+1)+16x(x-2)}{x(x+1)(x-2)}=\frac{30(x^2-2x+x-2)}{x(x+1)(x-2)} \mid \cdot x(x+1)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 13x^2+13x+16x^2-32x=30x^2-60x+30x-60$$

$$\Leftrightarrow 29x^2-19x=30x^2-30x-60 \mid -29x^2+19x$$

$$\Leftrightarrow 0=x^2-11x-60 \Leftrightarrow x^2-11x-60=0$$

$$p=-11 \Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{11}{2} \qquad q=-60$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{121}{4}+60=\frac{121}{4}+\frac{240}{4}=\frac{361}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{19}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{11}{2}+\frac{19}{2}=\frac{30}{2}=\underline{\underline{15}} \\ x_2=\frac{11}{2}-\frac{19}{2}=-\frac{8}{2}=\underline{\underline{-4}} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{L=\{15\,;-4\}}}$$

A6	**Aufgabe**			
	Bestimmen Sie bei den folgenden Aufgaben vor der Lösungsmenge jeweils auch die Definitionsmenge.			
	a)	$\frac{2x+1}{3x-4}=\frac{x+6}{4x+1}$	b)	$\frac{x+5}{2}-\frac{6}{x-1}=2$
	c)	$\frac{2}{a}=a+1$	d)	$3-\frac{1}{x}=\frac{2}{x-4}$
	e)	$\frac{x^2-2}{x^2-2x}=\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2}$	f)	$\frac{2x-8}{x-1}+\frac{2x+6}{x-9}=0$

A6 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht 4/3 und auch nicht -1/4 sein.

a) $\frac{2x+1}{3x-4}=\frac{x+6}{4x+1}$

Bestimmen der Definitionsmenge:

$$3x-4=0\,|+4 \Leftrightarrow 3x=4\,|:3 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$4x+1=0\,|-1 \Leftrightarrow 4x=-1\,|:4 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{4}{3};-\frac{1}{4}\right\}$$

$$\text{Hauptnenner}: (3x-4)(4x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{(2x+1)(4x+1)}{(3x-4)(4x+1)}=\frac{(x+6)(3x-4)}{(3x-4)(4x+1)}\,|\cdot(3x-4)(4x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(4x+1)=(x+6)(3x-4)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+2x+4x+1=3x^2-4x+18x-24$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+6x+1=3x^2+14x-24\,|-3x^2-14x+24$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-8x+25=0\,|:5 \Leftrightarrow x^2-\frac{8}{5}x+5=0$$

$$p=-\frac{8}{5} \Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{4}{5} \qquad q=5$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{16}{25}-5=\frac{16}{25}-\frac{125}{25}=-\frac{109}{25}<0 \Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$$

Da die Diskriminante kleiner als Null ist, hat die quadratische Gleichung keine Lösung. Das bedeutet, die Bruchgleichung hat ebenfalls keine Lösung.

A6 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht 1 sein.

b) $\frac{x+5}{2}-\frac{6}{x-1}=2 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Hauptnenner : $2(x-1)$

$$\frac{(x+5)(x-1)}{2(x-1)}-\frac{6\cdot 2}{2(x-1)}=\frac{2\cdot 2(x-1)}{2(x-1)} \mid \cdot 2(x-1)$$

$\Leftrightarrow (x+5)(x-1)-6\cdot 2=2\cdot 2(x-1)$

$\Leftrightarrow x^2-x+5x-5-12=4x-4 \mid -4x+4$

$\Leftrightarrow x^2+4x-4x-17+4=0$

$\Leftrightarrow x^2-13=0 \mid +13$

$\Leftrightarrow x^2=13 \mid \sqrt{}$

$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{13} \Rightarrow x_1=\underline{\underline{\sqrt{13}}} \quad x_2=\underline{\underline{-\sqrt{13}}}$

$\underline{\underline{L=\left\{\sqrt{13}\,;-\sqrt{13}\right\}}}$

A6 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: a darf nicht Null sein.

Statt x ist a die Variable nach der die quadratische Gleichung aufzulösen ist.

c) $\frac{2}{a}=a+1 \Rightarrow D=\mathbb{R}^*$

$\frac{2}{a}=a+1 \mid \cdot a$

$\Leftrightarrow 2=a^2+a \mid -2$

$\Leftrightarrow 0=a^2+a-2$

$\Leftrightarrow a^2+a-2=0$

$p=1 \Rightarrow -\frac{p}{2}=-\frac{1}{2} \quad q=-2$

$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

$a_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\quad a_1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}}$, $\quad a_2=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}=\underline{\underline{-2}}$

$\underline{\underline{L=\{1;-2\}}}$

A6	Ausführliche Lösung Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null und auch nicht 4 sein.	
	d)	$3-\frac{1}{x}=\frac{2}{x-4}\Rightarrow D=\mathbb{R}^*\setminus\{4\}$ Hauptnenner : $x(x-4)$ $\Rightarrow\frac{3\cdot x(x-4)}{x(x-4)}-\frac{1\cdot(x-4)}{x(x-4)}=\frac{2\cdot x}{x(x-4)}\;\vert\cdot x(x-4)$ $\Leftrightarrow 3\cdot x(x-4)-1\cdot(x-4)=2x$ $\Leftrightarrow 3x^2-12x-x+4=2x$ $\Leftrightarrow 3x^2-13x+4=2x\;\vert-2x$ $\Leftrightarrow 3x^2-15x+4=0\;\vert:3$ $\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{4}{3}=0$ $p=-5\Rightarrow-\frac{p}{2}=\frac{5}{2}\quad q=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}-\frac{4}{3}=\frac{75}{12}-\frac{16}{12}=\frac{59}{12}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{59}{12}}$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left\vert\;\begin{array}{l}x_1=\underline{\underline{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{59}{12}}}}\\ x_2=\underline{\underline{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{59}{12}}}}\end{array}\right.\Rightarrow\underline{\underline{L=\left\{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{59}{12}};\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{59}{12}}\right\}}}$

A6 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null und auch nicht 2 sein.

e)
$$\frac{x^2-2}{x^2-2x}=\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2}\Rightarrow D=\mathbb{R}^*\setminus\{2\}$$

$$\text{Hauptnenner}: x(x-2) \text{ weil } x^2-2x=x(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2}{x(x-2)}=\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}+\frac{(x-1)x}{x(x-2)} \;|\cdot x(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2=\underbrace{(x+2)(x-2)}_{\text{3. bin. Formel}}+(x-1)x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2=x^2-4+x^2-x$$

$$\Leftrightarrow x^2-2=2x^2-x-4 \;|-x^2+2$$

$$\Leftrightarrow 0=x^2-x-2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$$

$$p=-1\Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{1}{2} \quad q=-2$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2}} \text{ keine Lösung} \\ x_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{2}{2}=\underline{\underline{-1}} \end{array}\right. \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-1\}}}$$

Der formal berechnete Wert x = 2 ist keine Lösung der Bruchgleichung, da 2 nicht zur Definitionsmenge gehört.

A6	Ausführliche Lösung Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht 1 und auch nicht 9 sein.	
	f)	$\frac{2x-8}{x-1}+\frac{2x+6}{x-9}=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1;9\}$ Hauptnenner: $(x-1)(x-9)$ $\Rightarrow \frac{(2x-8)(x-9)}{(x-1)(x-9)}+\frac{(2x+6)(x-1)}{(x-1)(x-9)}=0 \mid \cdot(x-1)(x-9)$ $\Leftrightarrow (2x-8)(x-9)+(2x+6)(x-1)=0$ $\Leftrightarrow 2x^2-18x-8x+72+2x^2-2x+6x-6=0$ $\Leftrightarrow 4x^2-22x+66=0 \mid :4$ $\Leftrightarrow x^2-\frac{11}{2}x+\frac{33}{2}=0$ $p=-\frac{11}{2} \Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{11}{4} \quad q=\frac{33}{2}$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{121}{16}-\frac{33}{2}=\frac{121}{16}-\frac{264}{16}=-\frac{143}{16}<0 \Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$ Da die Diskriminante kleiner als Null ist, hat die quadratische Gleichung keine Lösung. Das bedeutet, die Bruchgleichung hat ebenfalls keine Lösung.

A7	**Aufgabe**			
	Bestimmen Sie bei den folgenden Aufgaben vor der Lösungsmenge jeweils auch die Definitionsmenge.			
	a)	$\frac{x+4}{x-1}+\frac{x+3}{x-9}=0$	b)	$x^2-1=\frac{(x-1)^3}{x}$
	c)	$\frac{7-2v^2}{v-2}=v+1+\frac{3v}{v-2}$	d)	$\frac{36}{m+1}-15=\frac{4}{m}$
	e)	$\frac{a^2+2a+1}{(a-3)(a-1)}=\frac{a+1}{a-1}+\frac{a+2}{a-3}$	f)	$\frac{x-1}{x-2}-7=-\frac{x+3}{x-2}$

A7 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht 1 und auch nicht 9 sein.

a)

$$\frac{x+4}{x-1}+\frac{x+3}{x-9}=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1;9\}$$

$$\text{Hauptnenner}: (x-1)(x-9)$$

$$\Rightarrow \frac{(x+4)(x-9)}{(x-1)(x-9)}+\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-9)}=0 \mid \cdot(x-1)(x-9)$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x-9)+(x+3)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-9x+4x-36+x^2-x+3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x-39=0 \mid :2$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{3}{2}x-\frac{39}{2}=0$$

$$p=-\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{3}{4} \qquad q=-\frac{39}{2}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{16}+\frac{39}{2}=\frac{9}{16}+\frac{312}{16}=\frac{321}{16} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{321}{16}}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\underline{\underline{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{321}{16}}}} \\ x_2=\underline{\underline{\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{321}{16}}}} \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\frac{3}{4}+\sqrt{\frac{321}{16}};\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{321}{16}}\right\}}}$$

A7	Ausführliche Lösung Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht Null sein.	
	b)	$x^2-1=\frac{(x-1)^3}{x} \Rightarrow D=\mathbb{R}^*$ x^2-1 ist nach der 3. binomischen Formel $(x-1)(x+1)$ $(x-1)^3=(x-1)\underbrace{(x-1)^2}_{\text{2. bin. Formel}}=(x-1)(x^2-2x+1)$ damit wird aus obiger Bruchgleichung: $(x-1)(x+1)=\frac{(x-1)(x^2-2x+1)}{x} \mid \cdot x$ $\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=(x-1)(x^2-2x+1) \mid -(x-1)(x^2-2x+1)$ $\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)-(x-1)(x^2-2x+1)=0 \mid (x-1)$ ausklammern $\Leftrightarrow (x-1)\left[x(x+1)-(x^2-2x+1)\right]=0$ $\Leftrightarrow (x-1)\left[x^2+x-x^2+2x-1\right]=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(3x-1)=0$ Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt: $x-1=0 \Leftrightarrow x_1=\underline{\underline{1}} \quad \vee \quad 3x-1=0 \Leftrightarrow x_2=\underline{\underline{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{1;\frac{1}{3}\right\}}}$

A7	Ausführliche Lösung Zu beachten ist die Definitionsmenge: v darf nicht 2 sein. Statt x ist v die Variable nach der die quadratische Gleichung aufzulösen ist.
	c) $\frac{7-2v^2}{v-2}=v+1+\frac{3v}{v-2} \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ Hauptnenner : v − 2 $\Rightarrow \frac{7-2v^2}{v-2}=\frac{(v+1)(v-2)}{v-2}+\frac{3v}{v-2} \mid \cdot (v-2)$ $\Leftrightarrow 7-2v^2=v^2-2v+v-2+3v$ $\Leftrightarrow 7-2v^2=v^2+2v-2 \mid -7+2v^2$ $\Leftrightarrow 0=3v^2+2v-9 \Leftrightarrow 3v^2+2v-9=0 \mid :3$ $\Leftrightarrow v^2+\frac{2}{3}v-3=0$ $p=\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{p}{2}=-\frac{1}{3} \quad q=-3$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+3=\frac{1}{9}+\frac{27}{9}=\frac{28}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{28}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{28}$ $v_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ | $\underline{\underline{v_1=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{28}}}$; $\underline{\underline{v_2=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{28}}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{28}\,;\,-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{28}\right\}}}$

A7	Ausführliche Lösung Zu beachten ist die Definitionsmenge: m darf nicht Null und auch nicht -1 sein. Statt x ist m die Variable nach der die quadratische Gleichung aufzulösen ist.	
	d)	$\frac{36}{m+1}-15=\frac{4}{m}\Rightarrow D=\mathbb{R}^*\setminus\{-1\}$ Hauptnenner : $m(m+1)$ $\Rightarrow\frac{36m}{m(m+1)}-\frac{15m(m+1)}{m(m+1)}=\frac{4(m+1)}{m(m+1)}\mid\cdot m(m+1)$ $\Leftrightarrow 36m-15m^2-15m=4m+4$ $\Leftrightarrow -15m^2+21m=4m+4\mid -4m-4$ $\Leftrightarrow -15m^2+17m-4=0\mid :(-15)$ $\Leftrightarrow m^2-\frac{17}{15}m+\frac{4}{15}=0$ $p=-\frac{17}{15}\Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{17}{30}\quad q=\frac{4}{15}$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{289}{900}-\frac{4}{15}=\frac{289}{900}-\frac{240}{900}=\frac{49}{900}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{900}}=\frac{7}{30}$ $m_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left\vert\;\begin{array}{l} m_1=\frac{17}{30}+\frac{7}{30}=\frac{24}{30}=\underline{\underline{\frac{4}{5}}} \\ m_2=\frac{17}{30}-\frac{7}{30}=\frac{10}{30}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}\end{array}\right.\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{\frac{4}{5};\frac{1}{3}\right\}}}$

A7 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: a darf nicht 3 und auch nicht 1 sein.
Statt x ist a die Variable nach der die quadratische Gleichung aufzulösen ist.

e)

$$\frac{a^2+2a+1}{(a-3)(a-1)}=\frac{a+1}{a-1}+\frac{a+2}{a-3}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{3;1\}$$

Hauptnenner: $(a-3)(a-1)$

$$\Rightarrow \frac{a^2+2a+1}{(a-3)(a-1)}=\frac{(a+1)(a-3)}{(a-3)(a-1)}+\frac{(a+2)(a-1)}{(a-3)(a-1)}\,|\cdot(a-3)(a-1)$$

$$\Leftrightarrow a^2+2a+1=(a+1)(a-3)+(a+2)(a-1)$$

$$\Leftrightarrow a^2+2a+1=a^2-3a+a-3+a^2-a+2a-2$$

$$\Leftrightarrow a^2+2a+1=2a^2-a-5\,|-a^2-2a-1$$

$$\Leftrightarrow 0=a^2-3a-6\Leftrightarrow a^2-3a-6=0$$

$$p=-3\Rightarrow -\frac{p}{2}=\frac{3}{2}\quad q=-6$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}+6=\frac{9}{4}+\frac{24}{4}=\frac{33}{4}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{33}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{33}$$

$$a_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}a_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{33}\\ a_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{33}\end{array}\right.\Rightarrow L=\left\{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{33};\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33}\right\}$$

A7 Ausführliche Lösung

Zu beachten ist die Definitionsmenge: x darf nicht 2 sein.

f)

$$\frac{x-1}{x-2}-7=-\frac{x+3}{x-2}\Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

Hauptnenner: $(x-2)$

$$\Rightarrow\frac{x-1}{(x-2)}-\frac{7(x-2)}{(x-2)}=-\frac{x+3}{(x-2)}\,|\cdot(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x-1-7(x-2)=-(x+3)$$ Bruchstrich ersetzt Klammer

$$\Leftrightarrow -x-1-7x+14=-x-3$$

$$\Leftrightarrow -6x+13=x+3=-x-3\,|+x+3$$

$$\Leftrightarrow -5x+16=0\,|-16\Leftrightarrow -5x=-16\,|:(-5)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{16}{5}\Rightarrow L=\left\{\frac{16}{5}\right\}$$

Die Äquivalenzumformung der Bruchgleichung führt auf eine lineare Gleichung. Diese hat nur eine Lösung.