Lösungen Potenzen und Wurzeln IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse					
	a)	$\sqrt{8}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$	b)	$\sqrt{18}-3\sqrt{8}=-3\sqrt{2}$	c)	$\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}=3\sqrt{5}-5$

E2	Ergebnisse	
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^2}-\left(4\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}-40$
	b)	$\sqrt{3^4}+\left(-2\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3^2}\right)^3-5\sqrt{3}\sqrt{3^3}=135$

E3	Ergebnisse			
	a)	$\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^5=6\sqrt{2}+4$	b)	$4\sqrt{2}+3\sqrt{0,5}-2\sqrt{4,5}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$
	c)	$\left(\sqrt{k}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}\right)^2=k^2+0,5k$	d)	$\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=2$
	e)	$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=-1$	f)	$\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)^2=15-4\sqrt{14}$

E4	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^5}=x^4$	b)	$\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^5}=a^4\sqrt{a}$
	c)	$\sqrt{\frac{2x}{3y}}\cdot\sqrt{\frac{4x}{3y^2}}=\frac{2x}{3y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}$	d)	$\left(\sqrt{k}\right)^3+k\sqrt{k}-\sqrt{4k^3}=0$
	e)	$\left(\sqrt{2k}\right)^3-k+\left(2\sqrt{k}\right)^2-\sqrt{2k^3}=k\sqrt{2k}+3k$	f)	$\sqrt{\left(1,5k\right)^2}-0,5k=k$

E5	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{4k^2+8k+4}=2\left(k+1\right)$	b)	$\frac{\sqrt{3k^2-3}}{\sqrt{k-1}}=\sqrt{3\left(k+1\right)}$
	c)	$\frac{\sqrt{k^2-16}}{k-4}=\sqrt{\frac{k+4}{k-4}}$	d)	$\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}=\sqrt{x^2-y^2}$
	e)	$\frac{\left(\sqrt{2k}\right)^5+\left(2\sqrt{k}\right)^3}{4\sqrt{k}}=k^2\sqrt{2}+2k$	f)	$\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^2=x^2y+2xy\sqrt{xy}+xy^2$

E6	Ergebnisse	
	a)	$y=\frac{1}{2k}x^4-x^2+3k$ für $x=\sqrt{k}\Rightarrow y=\frac{5k}{2}$
	b)	$y=\frac{2}{3}x^3-kx+5k\sqrt{k}$ für $x=-\frac{1}{2}\sqrt{k}\Rightarrow y=\frac{65}{12}k\sqrt{k}$

E7	Ergebnisse					
	a)	$\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$	b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -\left(\sqrt{2}+2\right)$	c)	$\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
	d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4-\sqrt{15}$	e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{k}+1\right)$	f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-1} = \frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{k-1}$

E8	Ergebnis
	$\sqrt{u^2+1}$ liefert für $u > 1$ den kleinsten Wert, denn $u^2+1 < u(u+1) = u^2\left(1+\frac{1}{u}\right)$

E9	Ergebnis
	Diagonale c: $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	**Aufgabe**				
	Fassen Sie zusammen				
	a)	$\sqrt{8}-3\sqrt{2}$	b)	$\sqrt{18}-3\sqrt{8}$	c) $\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}$

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	$\sqrt{8}-3\sqrt{2}=\sqrt{4\cdot 2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\underline{\underline{-\sqrt{2}}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	$\sqrt{18}-3\sqrt{8}=\sqrt{9\cdot 2}-3\sqrt{4\cdot 2}=3\sqrt{2}-6\sqrt{2}=\underline{\underline{-3\sqrt{2}}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}=\sqrt{5}+\sqrt{4\cdot 5}-5=\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5=\underline{\underline{3\sqrt{5}-5}}$

A2	**Aufgabe**			
	Fassen Sie zusammen			
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^2}-\left(4\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\sqrt{5^3}$	b)	$\sqrt{3^4}+\left(-2\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3^2}\right)^3-5\sqrt{3}\sqrt{3^3}$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	$\left(\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^2}-\left(4\sqrt{5}\right)^2+\sqrt{5}\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}+3\cdot 5-16\cdot 5+25$ $=5\sqrt{5}+15-80+25=\underline{\underline{5\sqrt{5}-40}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	$\sqrt{3^4}+\left(-2\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3^2}\right)^3-5\sqrt{3}\sqrt{3^3}=3^{\frac{4}{2}}+16\cdot 3^{\frac{4}{2}}+3^{\frac{6}{2}}-5\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{2}}$ $=3^2+16\cdot 3^2+3^3-5\cdot 3^2$ $=9+16\cdot 9+27-45=\underline{\underline{135}}$

A3	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie					
	a)	$\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^5$	b)	$4\sqrt{2}+3\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{4{,}5}$	c)	$\left(\sqrt{k}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}\right)^2$
	d)	$\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$	e)	$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$	f)	$\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)^2$

A3	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\left(\sqrt{2}\right)^3+\left(\sqrt{2}\right)^4+\left(\sqrt{2}\right)^5$ $=2\sqrt{2}+2^2+2^2\sqrt{2}$ $=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4$ $=\underline{\underline{6\sqrt{2}+4}}$	b)	$4\sqrt{2}+3\sqrt{0{,}5}-2\sqrt{4{,}5}$ $=4\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{9}{2}}$ $=4\sqrt{2}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}$ $=4\sqrt{2}+3\cdot\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}-2\cdot\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$ $=4\sqrt{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\underline{\underline{\frac{5}{2}\sqrt{2}}}$

A3	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\left(\sqrt{k}\right)^4+\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}\right)^2=k^2+\frac{1}{2}k$ $=\underline{\underline{k^2+0{,}5k}}$	d)	$\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=\left(\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$ $=\left(2\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$ $=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\underline{\underline{2}}$

A3	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\underbrace{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}_{\text{3. bin. Formel}}=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2$ $=2-3=\underline{\underline{-1}}$	f)	$\underbrace{\left(\sqrt{8}-\sqrt{7}\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}}=8-2\sqrt{8}\cdot\sqrt{7}+7$ $=\underline{\underline{15-4\sqrt{14}}}$

A4	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie					
	a)	$\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^5}$	b)	$\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^5}$	c)	$\sqrt{\frac{2x}{3y}}\cdot\sqrt{\frac{4x}{3y^2}}$
	d)	$\left(\sqrt{k}\right)^3+k\sqrt{k}-\sqrt{4k^3}$	e)	$\left(\sqrt{2k}\right)^3-k+\left(2\sqrt{k}\right)^2-\sqrt{2k^3}$	f)	$\sqrt{(1{,}5k)^2}-0{,}5k$

A4	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\sqrt{x^3}\cdot\sqrt{x^5}=\sqrt{x^3\cdot x^5}$ $=\sqrt{x^8}$ $=\underline{\underline{x^4}}$	b)	$\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^5}=\sqrt{a^3\cdot a\cdot a^5}$ $=\sqrt{a^8\cdot a}$ $=\underline{\underline{a^4\sqrt{a}}}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\sqrt{\frac{2x}{3y}}\cdot\sqrt{\frac{4x}{3y^2}}=\sqrt{\frac{2x\cdot4y}{3y\cdot3y^2}}$ $=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x^2}{y^3}}$ $=\underline{\underline{\frac{2x}{3y}\cdot\sqrt{\frac{2}{y}}}}$	d)	$\left(\sqrt{k}\right)^3+k\sqrt{k}-\sqrt{4k^3}$ $=k\sqrt{k}+k\sqrt{k}-2k\sqrt{k}$ $=\underline{\underline{0}}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\left(\sqrt{2k}\right)^3-k+\left(2\sqrt{k}\right)^2-\sqrt{2k^3}$ $=2k\sqrt{2k}-k+4k-k\sqrt{2k}$ $=\underline{\underline{k\sqrt{2k}+3k}}$	f)	$\sqrt{(1{,}5k)^2}-0{,}5k$ $=1{,}5k-0{,}5k$ $=\underline{\underline{k}}$

A5	**Aufgabe**					
	Vereinfachen Sie, falls dies möglich ist					
	a)	$\sqrt{4k^2+8k+4}$	b)	$\frac{\sqrt{3k^2-3}}{\sqrt{k-1}}$	c)	$\frac{\sqrt{k^2-16}}{k-4}$
	d)	$\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}$	e)	$\frac{\left(\sqrt{2k}\right)^5+\left(2\sqrt{k}\right)^3}{4\sqrt{k}}$	f)	$\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^2$

A5	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\sqrt{4k^2+8k+4}=\sqrt{4\left(k^2+2k+1\right)}$ $=2\cdot\sqrt{(k+1)^2}$ $=\underline{\underline{2(k+1)}}$	b)	$\frac{\sqrt{3k^2-3}}{\sqrt{k-1}}=\sqrt{\frac{3\left(k^2-1\right)}{k-1}}$ $=\sqrt{\frac{3(k-1)(k+1)}{k-1}}$ $=\underline{\underline{\sqrt{3(k+1)}}}$

A5	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\frac{\sqrt{k^2-16}}{k-4}=\sqrt{\frac{k^2-16}{(k-4)^2}}$ $=\sqrt{\frac{(k-4)(k+4)}{(k-4)^2}}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{k+4}{k-4}}}}$	d)	$\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x+y}=\sqrt{(x-y)(x+y)}$ $=\underline{\underline{\sqrt{x^2-y^2}}}$

A5	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\frac{\left(\sqrt{2k}\right)^5+\left(2\sqrt{k}\right)^3}{4\sqrt{k}}$ $=\frac{\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{k^5}+8\sqrt{k^3}}{4\sqrt{k}}$ $=\frac{\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{k^5}\cdot\sqrt{k}+8\sqrt{k^3}\cdot\sqrt{k}}{4\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}$ $=\frac{4\sqrt{2}\cdot k^3+8k^2}{4k}$ $=\underline{\underline{k^2\sqrt{2}+2k}}$	f)	$\underbrace{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^2}_{\text{1. bin. Formel}}$ $=\left(x\sqrt{y}\right)^2+2x\sqrt{y}\cdot y\sqrt{x}+\left(y\sqrt{x}\right)^2$ $=\underline{\underline{x^2y+2xy\sqrt{xy}+xy^2}}$

A6	**Aufgabe**			
	Berechnen Sie y			
	a)	$y=\frac{1}{2k}x^4-x^2+3k$ für $x=\sqrt{k}$	b)	$y=\frac{2}{3}x^3-kx+5k\sqrt{k}$ für $x=-\frac{1}{2}\sqrt{k}$

A6	Ausführliche Lösung	
	a)	$y=\frac{1}{2k}x^4-x^2+3k$ mit $x=\sqrt{k}$ wird: $y=\frac{1}{2k}\left(\sqrt{k}\right)^4-\left(\sqrt{k}\right)^2+3k=\frac{1}{2k}\cdot k^2-k+3k=\frac{1}{2}k+2k=\underline{\underline{\frac{5}{2}k}}$

A6	Ausführliche Lösung	
	b)	$y=\frac{2}{3}x^3-kx+5k\sqrt{k}$ mit $x=-\frac{1}{2}\sqrt{k}$ wird: $y=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)^3-k\left(-\frac{1}{2}\sqrt{k}\right)+5k\sqrt{k}=-\frac{1}{12}k\sqrt{k}+\frac{1}{2}k\sqrt{k}+5k\sqrt{k}$ $=\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+5\right)k\sqrt{k}=\left(-\frac{1}{12}+\frac{6}{12}+\frac{60}{12}\right)k\sqrt{k}=\underline{\underline{\frac{65}{12}k\sqrt{k}}}$

A7	**Aufgabe**					
	Machen Sie den Nenner rational					
	a)	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$	c)	$\frac{3}{\sqrt{12}}$
	d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$	e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}}$	f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-1}$

A7	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$	b)	$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}+2}{1-2}=\frac{\sqrt{2}+2}{-1}=\underline{\underline{-\left(\sqrt{2}+2\right)}}$

A7	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}}=\frac{3\cdot\sqrt{4\cdot3}}{12}=\frac{3\cdot2\cdot\sqrt{3}}{12}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}}$	d)	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{5-2\cdot\sqrt{15}+3}{5-3}=\frac{8-2\cdot\sqrt{15}}{2}=\underline{\underline{4-\sqrt{15}}}$

A7	Ausführliche Lösungen			
	e)	$\frac{k+\sqrt{k}}{2\sqrt{k}}=\frac{\left(k+\sqrt{k}\right)\sqrt{k}}{2\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}}=\frac{k\sqrt{k}+k}{2k}=\frac{\sqrt{k}}{2}+\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\sqrt{k}+1\right)}}$	f)	$\frac{k}{\sqrt{k}-1}=\frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{\left(\sqrt{k}-1\right)\left(\sqrt{k}+1\right)}=\frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{\left(\sqrt{k}\right)^2-1^2}=\underline{\underline{\frac{k\left(\sqrt{k}+1\right)}{k-1}}}$

A8	**Aufgabe**
	Welcher Term liefert für u > 1 den kleinsten Wert? $\sqrt{u^2+1}$ $\quad\quad$ $\sqrt{u(u+1)}$ $\quad\quad$ $\sqrt{u^2\left(1+\frac{1}{u}\right)}$ Begründen Sie Ihre Entscheidung.

A8	Ausführliche Lösung
	$(1)\ \sqrt{u^2+1} \qquad (2)\ \sqrt{u(u+1)} \qquad (3)\ \sqrt{u^2\left(1+\frac{1}{u}\right)}$ Bei (2) und (3) wird der Term unter der Wurzel ausmultipliziert. $(2)\ \sqrt{u^2+u} \qquad (3)\ \sqrt{u^2+u}$ Damit sind (2) und (3) gleichwertig. Zu vergleichen sind (1) und (2). $\sqrt{u^2+1} < \sqrt{u^2+u}$ für $u > 1$ Damit liefert $\sqrt{u^2+1}$ den kleinsten Wert.

A9	**Aufgabe**
	Ein Rechteck hat die Seiten $a = 2$ und $b = \sqrt{2}$. Wie lang ist die Diagonale?

A9	Ausführliche Lösung
	Rechteckseiten: $a = 2$ und $b = \sqrt{2}$ Nach dem Satz vom Pythagoras gilt für die Diagonale eines Rechtecks: $d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4+2} = \underline{\underline{\sqrt{6}}}$