Lösungen Potenzen und Wurzeln III

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27k}=9\sqrt{k}$	b)	$\left(3\sqrt{a}+x\sqrt{a}\right)\sqrt{a}=a(3+x)$
	c)	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2=8-2\sqrt{15}$	d)	$\left(\sqrt{50}+\sqrt{18}\right):\sqrt{2}=8$

E2	Ergebnisse			
	a)	$\left(\sqrt{3x}-\sqrt{12x}\right):\sqrt{x}=-\sqrt{3}$	b)	$\left(e^{0,5}-e^{-0,5}\right)\sqrt{2e}=(e-1)\sqrt{2}$
	c)	$\left(0,5x^{0,5}\right)^3+3x\sqrt{x}=\frac{25}{8}x\sqrt{x}$	d)	$0,5e\sqrt{e^{-2}}+2e=\frac{1}{2}+2e$

E3	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{50}=5\sqrt{2}$	b)	$3\sqrt{7}-\sqrt{112}=-\sqrt{7}$
	c)	$\sqrt{8x^2}+\frac{x}{2}\sqrt{2}=2,5x\sqrt{2}$	d)	$\sqrt{a^7}-\sqrt{9a^3}=\left(a^3-3a\right)\sqrt{a}$

E4	Ergebnisse			
	a)	$\sqrt{8k^2-16k+8}=2(k-1)\sqrt{2}$	b)	$\left(1+\sqrt{k}\right)^2=k+2\sqrt{k}+1$
	c)	$\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^2=a-4\sqrt{ab}+4b$	d)	$\sqrt{0,25k}-\sqrt{\frac{k}{25}}+3\sqrt{k}=3,3\sqrt{k}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)=x-2$
	b)	$\sqrt{xy^2}-5\sqrt{x^2y}+8x\sqrt{y}-10y\sqrt{x}=3\left(x\sqrt{y}-3y\sqrt{x}\right)$

E6	Ergebnisse			
	a)	$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$	b)	$\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}\sqrt{x}$
	c)	$\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}=\frac{1+2\sqrt{k}+k}{1-k}$	d)	$\frac{k}{\sqrt{5k}-\sqrt{3k}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5k}+\sqrt{3k}\right)$
	e)	$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}$	f)	$\sqrt{a}+1+a-\frac{a}{\sqrt{a}}=1+a$

E7	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{9k}\left(\sqrt{k}\right)^5+\frac{1}{9}\left(\sqrt{k}\right)^3+\frac{3}{2}k\sqrt{k}=\frac{31}{18}k\sqrt{k}$
	b)	$-\frac{1}{2k}\left[\left(-\sqrt{k}\right)^4+k\left(-\sqrt{k}\right)^2\right]=-k$
	c)	$-\frac{k^2}{144}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)^3+\frac{k}{2}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{k}$
	d)	$\frac{1}{k^2}\left(\sqrt{0,5k}\right)^3-\frac{3}{2k}\left(\sqrt{0,5k}\right)^2+2=\frac{\sqrt{2k}}{4k}+\frac{5}{4}$

E8	Ergebnisse					
	a)	$\sqrt{8}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$	b)	$\sqrt{18}-3\sqrt{8}=-3\sqrt{2}$	c)	$\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}=3\sqrt{5}-5$

Potenz- und Wurzelgesetze

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$a^0=1$	$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$	$\sqrt{a^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$

Da jede Wurzel als Potenz dargestellt werden kann, ist es in vielen Fällen vorteilhaft, Wurzeln in Potenzen zu verwandeln um dann die Rechnung durch anwenden der Potenzgesetze durchzuführen. Bei Bedarf kann ein Ergebnis mit gebrochenem Exponenten wieder in eine Wurzel verwandelt werden.

Ausführliche Lösungen :

A1	**Aufgabe**		
	Vereinfachen Sie		
a)	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27k}$	b)	$\left(3\sqrt{a}+x\sqrt{a}\right)\sqrt{a}$
c)	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2$	d)	$\left(\sqrt{50}+\sqrt{18}\right):\sqrt{2}$

A1	Ausführliche Lösungen		
a)	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27k}=\sqrt{3\cdot 27k}$ $=\sqrt{3^4k}$ $=3^2\sqrt{k}$ $=\underline{\underline{9\sqrt{k}}}$	b)	$\left(3\sqrt{a}+x\sqrt{a}\right)\sqrt{a}=3\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}+x\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$ $=3a+x\cdot a$ $=\underline{\underline{a(3+x)}}$

A1	Ausführliche Lösungen		
c)	$\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2$ $=3-2\sqrt{15}+5$ $=\underline{\underline{8-2\sqrt{15}}}$	d)	$\left(\sqrt{50}+\sqrt{18}\right):\sqrt{2}=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ $=\sqrt{\frac{50}{2}}+\sqrt{\frac{18}{2}}$ $=\sqrt{25}+\sqrt{9}$ $=5+3=\underline{\underline{8}}$

A2	**Aufgabe**		
	Vereinfachen Sie		
a)	$\left(\sqrt{3x}-\sqrt{12x}\right):\sqrt{x}$	b)	$\left(e^{0,5}-e^{-0,5}\right)\sqrt{2e}$
c)	$\left(0,5x^{0,5}\right)^3+3x\sqrt{x}$	d)	$0,5e\sqrt{e^{-2}}+2e$

A2	Ausführliche Lösungen		
a)	$\left(\sqrt{3x}-\sqrt{12x}\right):\sqrt{x}=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{12x}}{\sqrt{x}}$ $=\sqrt{\frac{3x}{x}}-\sqrt{\frac{12x}{x}}$ $=\sqrt{3}-\sqrt{12}$ $=\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot 3}$ $=\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ $=\underline{\underline{-\sqrt{3}}}$	b)	$\left(e^{0,5}-e^{-0,5}\right)\sqrt{2e}=\left(\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\sqrt{2e}$ $=\sqrt{e}\cdot\sqrt{2e}-\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{e}}$ $=\sqrt{2e\cdot e}-\sqrt{\frac{2e}{e}}$ $=\sqrt{2e^2}-\sqrt{2}$ $=\sqrt{2}\cdot e-\sqrt{2}$ $=\underline{\underline{\sqrt{2}(e-1)}}$

A2	Ausführliche Lösungen			
	c)	$\left(0{,}5x^{0{,}5}\right)^3+3x\sqrt{x}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^3+3x\sqrt{x}$ $=\frac{1}{8}x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}$ $=x\sqrt{x}\left(\frac{1}{8}+3\right)$ $=\left(\frac{1}{8}+\frac{24}{8}\right)x\sqrt{x}$ $=\underline{\underline{\frac{25}{8}x\sqrt{x}}}$	d)	$0{,}5e\sqrt{e^{-2}}+2e=\frac{1}{2}e\cdot\sqrt{\frac{1}{e^2}}+2e$ $=\frac{1}{2}e\cdot\frac{1}{e}+2e$ $=\frac{1}{2}\cancel{e}\cdot\frac{1}{\cancel{e}}+2e$ $=\underline{\underline{\frac{1}{2}+2e}}$

A3	**Aufgabe**			
	Vereinfachen Sie			
	a)	$\sqrt{50}$	b)	$3\sqrt{7}-\sqrt{112}$
	c)	$\sqrt{8x^2}+\frac{x}{2}\sqrt{2}$	d)	$\sqrt{a^7}-\sqrt{9a^3}$

A3	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\underline{\underline{5\sqrt{2}}}$	b)	$3\sqrt{7}-\sqrt{112}=3\sqrt{7}-\sqrt{16\cdot 7}$ $=3\sqrt{7}-4\sqrt{7}=\underline{\underline{-\sqrt{7}}}$
	c)	$\sqrt{8x^2}+\frac{x}{2}\sqrt{2}=\sqrt{4\cdot 2x^2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}$ $=2x\sqrt{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{2}$ $=\underline{\underline{2{,}5x\sqrt{2}}}$	d)	$\sqrt{a^7}-\sqrt{9a^3}=\sqrt{a^6\cdot a}-\sqrt{3^2a^2\cdot a}$ $=a^3\sqrt{a}-3a\sqrt{a}$ $=\underline{\underline{\sqrt{a}\left(a^3-3a\right)}}$

A4	**Aufgabe**			
	Vereinfachen Sie			
	a)	$\sqrt{8k^2-16k+8}$	b)	$\left(1+\sqrt{k}\right)^2$
	c)	$\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^2$	d)	$\sqrt{0{,}25k}-\sqrt{\frac{k}{25}}+3\sqrt{k}$

A4	Ausführliche Lösungen			
	a)	$\sqrt{8k^2-16k+8}=\sqrt{8\left(k^2-2k+1\right)}$ $=2\sqrt{2\left(k-1\right)^2}$ $=\underline{\underline{2\left(k-1\right)\sqrt{2}}}$	b)	$\underbrace{\left(1+\sqrt{k}\right)^2}_{\text{1. bin. Formel}}=1+2\sqrt{k}+k$ $=\underline{\underline{k+2\sqrt{k}+1}}$

A4	Ausführliche Lösungen		
c)	$\underbrace{\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}} = a - 2\cdot\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b} + 4b$ $= \underline{\underline{a - 4\sqrt{ab} + 4b}}$	d)	$\sqrt{0{,}25k} - \sqrt{\frac{k}{25}} + 3\sqrt{k} = \sqrt{\frac{1}{4}k} - \frac{1}{5}\sqrt{k} + 3\sqrt{k}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{k} - \frac{1}{5}\sqrt{k} + 3\sqrt{k}$ $= \frac{5}{10}\sqrt{k} - \frac{2}{10}\sqrt{k} + \frac{30}{10}\sqrt{k}$ $= \frac{33}{10}\sqrt{k} = \underline{\underline{3{,}3\sqrt{k}}}$

A5	**Aufgabe**
	Vereinfachen Sie
a)	$\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$
b)	$\sqrt{xy^2} - 5\sqrt{x^2y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x}$

A5	Ausführliche Lösung
a)	$\underbrace{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}_{\text{3. binomische Formel}} = \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \underline{\underline{x-2}}$

A5	Ausführliche Lösung
b)	$\sqrt{xy^2} - 5\sqrt{x^2y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x} = y\sqrt{x} - 5x\sqrt{y} + 8x\sqrt{y} - 10y\sqrt{x}$ $= 3x\sqrt{y} - 9y\sqrt{x} = \underline{\underline{3\left(x\sqrt{y} - 3y\sqrt{x}\right)}}$

A6	**Aufgabe**				
	Machen Sie den Nenner rational				
a)	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	b)	$\frac{x}{2\sqrt{x}}$	c)	$\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}$
d)	$\frac{k}{\sqrt{5k}-\sqrt{3k}}$	e)	$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}$	f)	$\sqrt{a}+1+a-\frac{a}{\sqrt{a}}$

A6	Ausführliche Lösungen		
a)	$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{5}\sqrt{5}}}$	b)	$\frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{x}}}$

A6 Ausführliche Lösungen

c)
$$\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}=\frac{\left(1+\sqrt{k}\right)\left(1+\sqrt{k}\right)}{\left(1-\sqrt{k}\right)\left(1+\sqrt{k}\right)}=\frac{1+2\sqrt{k}+k}{1^2-\left(\sqrt{k}\right)^2}=\underline{\underline{\frac{1+2\sqrt{k}+k}{1-k}}}$$

d)
$$\frac{k}{\sqrt{5k}-\sqrt{3k}}=\frac{k\left(\sqrt{5k}+\sqrt{3k}\right)}{\left(\sqrt{5k}-\sqrt{3k}\right)\left(\sqrt{5k}+\sqrt{3k}\right)}=\frac{k\left(\sqrt{5k}+\sqrt{3k}\right)}{5k-3k}=\frac{k\left(\sqrt{5k}+\sqrt{3k}\right)}{2k}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5k}+\sqrt{3k}\right)}}$$

A6 Ausführliche Lösungen

e)
$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}=\underline{\underline{\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}}}$$

f)
$$\sqrt{a}+1+a-\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}+1+a-\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\sqrt{a}+1+a-\frac{a\sqrt{a}}{a}=\sqrt{a}+1+a-\sqrt{a}=\underline{\underline{1+a}}$$

A7 Aufgabe

Vereinfachen Sie

a) $\frac{1}{9k}\left(\sqrt{k}\right)^5+\frac{1}{9}\left(\sqrt{k}\right)^3+\frac{3}{2}k\sqrt{k}$	b) $-\frac{1}{2k}\left[\left(-\sqrt{k}\right)^4+k\left(-\sqrt{k}\right)^2\right]$
c) $-\frac{k^2}{144}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)^3+\frac{k}{2}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)$	d) $\frac{1}{k^2}\left(\sqrt{0{,}5k}\right)^3-\frac{3}{2k}\left(\sqrt{0{,}5k}\right)^2+2$

A7 Ausführliche Lösung

a)
$$\frac{1}{9k}\left(\sqrt{k}\right)^5+\frac{1}{9}\left(\sqrt{k}\right)^3+\frac{3}{2}k\sqrt{k}=\frac{1}{9k}\left(k^{\frac{1}{2}}\right)^5+\frac{1}{9}\left(k^{\frac{1}{2}}\right)^3+\frac{3}{2}k\cdot k^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{9k}k^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{9}k^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}k^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{9}k^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{9}k^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}k^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left(\frac{2}{18}+\frac{2}{18}+\frac{27}{18}\right)k^{\frac{3}{2}}$$
$$=\underline{\underline{\frac{31}{18}k^{\frac{3}{2}}=\frac{31}{18}k\sqrt{k}}}$$

A7	Ausführliche Lösung
b)	$-\frac{1}{2k}\left[\left(-\sqrt{k}\right)^4+k\left(-\sqrt{k}\right)^2\right]=-\frac{1}{2k}\left[\left(\sqrt{k}\right)^4+k\left(\sqrt{k}\right)^2\right]$ $=-\frac{1}{2k}\left(k^2+k\cdot k\right)=-\frac{1}{2k}\cdot 2k^2=\underline{\underline{-k}}$

A7	Ausführliche Lösung
c)	$-\frac{k^2}{144}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)^3+\frac{k}{2}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{k}}\right)=-\frac{k^2}{4\cdot 6^2}\cdot\frac{6^3}{\left(\sqrt{k}\right)^3}+\frac{k}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{k}}$ $=-\frac{k^2}{4}\cdot\frac{6}{k^{\frac{3}{2}}}+\frac{3k}{k^{\frac{1}{2}}}$ $=-\frac{3k^2\cdot k^{-\frac{3}{2}}}{2}\cdot+3k\cdot k^{-\frac{1}{2}}$ $=-\frac{3}{2}k^{\frac{1}{2}}+3k^{\frac{1}{2}}$ $\underline{\underline{=\frac{3}{2}k^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{k}}}$

A7	Ausführliche Lösung
d)	$\frac{1}{k^2}\left(\sqrt{0{,}5k}\right)^3-\frac{3}{2k}\left(\sqrt{0{,}5k}\right)^2+2=\frac{1}{k^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{k}{2}}\right)^3-\frac{3}{2k}\cdot\frac{k}{2}+2$ $=\frac{1}{k^2}\cdot\frac{k\sqrt{k}}{2\sqrt{2}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}+2$ $=\frac{\sqrt{k}}{2k\cdot\sqrt{2}}-\frac{3}{4}+\frac{8}{4}$ $=\frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{2}}{2k\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{5}{4}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2k}}{4k}+\frac{5}{4}}}$

A8	Aufgabe					
	Fassen Sie zusammen.					
	a)	$\sqrt{8}-3\sqrt{2}$	b)	$\sqrt{18}-3\sqrt{8}$	c)	$\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}$

A8	Ausführliche Lösung	
	a)	$\sqrt{8}-3\sqrt{2}=\sqrt{4\cdot 2}-3\sqrt{2}=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\underline{\underline{-\sqrt{2}}}$

A8	Ausführliche Lösung	
	b)	$\sqrt{18}-3\sqrt{8}=\sqrt{9\cdot 2}-3\sqrt{4\cdot 2}=3\sqrt{2}-6\sqrt{2}=\underline{\underline{-3\sqrt{2}}}$

A8	Ausführliche Lösung	
	c)	$\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{25}=\sqrt{5}+\sqrt{4\cdot 5}-5=\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5=\underline{\underline{3\sqrt{5}-5}}$