Lösungen Polynomgleichungen VII

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{3}x^4 - 3x^3 = 0 \Rightarrow L = \{0\,;9\}$
	b)	$\frac{1}{7}x^4 - 7 = 0 \Rightarrow L = \{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$
	c)	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 1 = 0 \Rightarrow L = \{\ \}$

E2	Ergebnisse	
	a)	$-2x^4 + x^2 + x = 0 \Rightarrow L = \{0\,;1\}$
	b)	$\frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{4}x^3 - x = 0 \Rightarrow L = \{-2\,;0\,;2\}$
	c)	$\frac{1}{3}\left(x^2 - 4\right)^2 - 3 = 0 \Rightarrow L = \{-\sqrt{7}\,;-1;1;\sqrt{7}\}$

E3	Ergebnisse	
	a)	$\frac{2}{5}\left(x^2 - 9\right)\left(x+2\right)^2 = 0 \Rightarrow L = \{-3\,;-2\,;3\}$
	b)	$\frac{1}{64}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x = 0 \Rightarrow L = \{-8\,;0\}$
	c)	$4x^4 - 3x^2 + x = 0 \Rightarrow L = \left\{-1;0\,;\frac{1}{2}\right\}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$x^4 - 5x^2 - 2x = 0 \Rightarrow L = \{-2\,;1-\sqrt{2}\,;0\,;1-\sqrt{2}\}$
	b)	$x^4 - 32x^2 + 256 = 0 \Rightarrow L = \{-4\,;4\}$
	c)	$x^4 + 2x^3 + x^2 = 0 \Rightarrow L = \{-1;0\}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = 0 \Rightarrow L = \{-2\,;2\}$
	b)	$x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \Rightarrow L = \{-2\,;-1;1;2\}$
	c)	$x^4 - 4x^3 + \frac{15}{4}x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};2\right\}$

E6	Ergebnisse	
	a)	$x^4 - 8x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow L = \{0;2;6\}$
	b)	$x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \Rightarrow L = \{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$
	c)	$3x^4 + (x^2+4)(x^2-4) = 0 \Rightarrow L = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

E7	Ergebnisse	
	a)	$x^4 - 4kx^3 + (4k^2-16)x^2 = 0 \Rightarrow L = \{\, 0; 2k+4; 2k-4 \,\}$
	b)	$\frac{1}{k}x(x^2+4k) = 0; k<0 \Rightarrow L = \{\, -2\sqrt{-k}; 0; 2\sqrt{-k} \,\}$
	c)	$\frac{2}{k^2}x^4 + \frac{1}{2k}x^3 = 0; k \neq 0 \Rightarrow L = \left\{\, 0; -\frac{1}{4}k \right\}$

E8	Ergebnisse	
	a)	$(x^2-1)(x^2-3k) = 0$
		$\Rightarrow L = \{\, -1; 1; -\sqrt{3k}; \sqrt{3k} \,\}$ falls $k > 0$
		$\Rightarrow L = \{\, -1; 0; 1; \}$ falls $k = 0$
		$\Rightarrow L = \{\, -1; 1; \}$ falls $k < 0$
	b)	$(x+k)^2 (x^2 - 2x + 2k) = 0$
		$\Rightarrow L = \{\, -k; 1-\sqrt{1-2k}; 1+\sqrt{1-2k} \,\}$ falls $k < \frac{1}{2}$
		$\Rightarrow L = \{\, -k \,\}$ falls $k > \frac{1}{2}$
		$\Rightarrow L = \{\, -k; 1 \,\}$ falls $k = \frac{1}{2}$

E9	Ergebnis
	$x^4 - 2kx^3 - 3x^2 + 6kx = 0 \Rightarrow L = \{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}; 2k\}$

E10	Ergebnis
	$x^5 - 2x^3 - 4k^2x = 0$ Hat immer drei Lösungen.

E11	Ergebnis
	$x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0 \Rightarrow L = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$

Ausführliche Lösungen

1a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{3}x^4 - 3x^3 = 0$

A1a	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{3}x^4 - 3x^3 = 0$ $\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{3}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0$ $\frac{1}{3}x - 3 \mid +3$ $\Leftrightarrow \frac{1}{3}x = 3 \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow x_4 = 9$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\,;9\}}}$
	Aus der Polynomgleichung kann x^3 ausgeklammert werden. Es entsteht ein Produkt. Da dieses aber Null ist, kann der Satz vom Nullprodukt angewendet werden, der da lautet: "Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist." Die Lösung der Gleichung findet man also dadurch, dass man jeden Faktor für sich gleich Null setzt. Der erste Faktor ergibt die dreifache Lösung 0. Der zweite Faktor ist eine lineare Gleichung, die durch Äquivalenzumformung zu lösen ist. In der Lösungsmenge erscheint die dreifache 0 nur einmal, da in der Mengendarstellung per Definition jedes Element nur einmal vorkommen darf.

1b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{7}x^4 - 7 = 0$

A1b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{7}x^4 - 7 = 0 \mid +7$ $\Leftrightarrow \frac{1}{7}x^4 = 7 \mid \cdot 7$ $\Leftrightarrow x^4 = 49 \mid \sqrt[4]{}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{49} = \pm\sqrt{7}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\right\}}}$

1c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

A1c	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow x^4+\frac{8}{3}x^2+4=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Rightarrow z^2+\frac{8}{3}z+4=0$ $\Rightarrow p=\frac{8}{3};q=4$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{16}{9}-\frac{36}{9}<0$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{\ \}}}$
	Die Polynomgleichung stellt eine biquadratische Gleichung dar. Die Substitutionsvariable z lässt sich mithilfe der p-q-Formel berechnen. Anschließend muss zurücksubstituiert und die Wurzel gezogen werden. Die Wurzel lässt sich nur für positive z-Werte lösen. Da in diesem Fall die Diskriminante < 0 ist, gibt es für z keine Lösung und damit auch keine für x.

2a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $-2x^4+x^2+x=0$

A2a Ausführliche Lösung

$$-2x^4+x^2+x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-2x^3+x+1\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$-2x^3+x+1=0 \,|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ x=1 & \downarrow & \underline{1} & \underline{+1} & \underline{+\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow x_2=1 \\ & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ & 1x^2+ & 1x & +\frac{1}{2} & =0 \end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2+x+\frac{1}{2}=0$$

$$p=1 \quad ; \quad q=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}<0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{0\,;1\}}}$$

Um eine Lösung der Polynomgleichung durch raten oder probieren zu finden, kann man entweder den Taschenrechner benutzen oder das Horner-Schema verwenden. Hat man eine Lösung für x z. B. mit dem Taschenrechner gefunden, so muss man auf jeden Fall die Polynomdivision durchführen um das Restpolynom zu finden.
Hat man hingegen mit dem Horner-Schema einen Lösungswert für x gefunden, so lässt sich aus den Koeffizienten das Restpolynom bilden.
Das Horner-Schema liefert also im Schnellverfahren als Abfallprodukt eine Polynomdivision.
Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = 1.
Da die Diskriminante der quadratischen Gleichung kleiner Null ist, hat diese keine Lösung. Zu den bisher bekannten Lösungen kommt keine mehr hinzu.

2b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$

A2b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow x^5-3x^3-4x=0$ $\Leftrightarrow x\left(x^4-3x^2-4\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ $x^4-3x^2-4=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Rightarrow z^2-3z-4=0$ $\Rightarrow p=-3\,;\,q=-4$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}+\frac{16}{4}=\frac{25}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left\vert \begin{array}{l} z_1=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4 \\ z_2=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-1 \end{array}\right.$ Rücksubstitution: $z_1=x^2=4 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$ $z_2=x^2=-1 \Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2\,;0\,;2\,\}}}$
	Die Polynomgleichung stellt eine biquadratische Gleichung dar. Die Substitutionsvariable z lässt sich mithilfe der p-q-Formel berechnen. Anschließend muss zurücksubstituiert und die Wurzel gezogen werden. Die Wurzel lässt sich nur für positive z-Werte lösen. Da z_2 negativ ist, trägt nur die Wurzel aus z_1 zur Lösung bei.

2c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

A2c	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0 \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)^2-9=0$ $\Leftrightarrow x^4-8x^2+16-9=0$ $\Leftrightarrow x^4-8x^2+7=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Rightarrow z^2-8z+7=0$ $\Rightarrow p=-8\,;q=7$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16-7=9$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{9}=3$ $\Rightarrow z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left\vert \begin{array}{l} z_1=4+3=7 \\ z_2=4-3=1 \end{array}\right.$ Rücksubstitution: $z_1=x^2=7\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{7}$ $z_2=x^2=1\Rightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{1}=\pm1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{7}\,;-1;1;\sqrt{7}\right\}}}$

3a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)\left(x+2\right)^2=0$

A3a	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)\left(x+2\right)^2=0 \mid \cdot\frac{5}{2}$ $\Leftrightarrow \left(x^2-9\right)\left(x+2\right)^2=0$ $x^2-9=0 \mid +9 \Leftrightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3$ $\left(x+2\right)^2=0$ $\Rightarrow \left(x+2\right)\left(x+2\right)=0 \Rightarrow x_{3/4}=-2$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-3;-2;3\right\}}}$

3b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$

A3b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{4}x+1\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{64}x^2+\frac{1}{4}x+1=0 \mid \cdot 64$ $\Leftrightarrow x^2+16x+64=0$ $\Rightarrow p=16\,;\,q=64$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=64-64=0$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$ $x_{2/3}=-\frac{p}{2}=-8$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-8;0\right\}}}$
	Da die Diskriminante D = 0 ist, gibt es für die quadratische Gleichung nur eine (doppelte) Lösung.

3c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $4x^4 - 3x^2 + x = 0$

A3c **Ausführliche Lösung**

$$4x^4 - 3x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(4x^3 - 3x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$4x^3 - 3x + 1 = 0 \mid \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ x = -1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{+1} & \underline{-\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow x_2 = -1 \\ & 1 & -1 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$p = -1 \quad ; \quad q = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$x_{3/4} = -\frac{p}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-1; 0; \frac{1}{2}\right\}}}$$

Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = -1.
Da die Diskriminante D = 0 ist, gibt es für die quadratische Gleichung nur eine (doppelte) Lösung.

4a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $x^4 - 5x^2 - 2x = 0$

A4a	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 5x^2 - 2x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^3 - 5x - 2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x^3 - 5x - 2 = 0$ $x = -2 \left\vert \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -5 & -2 \\ \downarrow & \underline{-2} & \underline{+4} & \underline{+2} \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_2 = -2$ $\text{Restpolynom}: x^2 - 2x - 1 = 0$ $p = -2 \quad ; \quad q = -1$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 1 = 2$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\vert \begin{array}{l} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-2; 1 - \sqrt{2}; 0; 1 + \sqrt{2}\right\}}}$
	Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = -2. Da die Diskriminante D > 0 ist, gibt es für die quadratische Gleichung zwei Lösungen. Mit den vorigen sind es dann 4 Lösungen. Raten führt oft zum Ziel, wenn man einen Teiler vom Absolutglied (hier = -2) nimmt.

4b **Aufgabe**

Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.

$x^4 - 32x^2 + 256 = 0$

A4b **Ausführliche Lösung**

$$x^4 - 32x^2 + 256 = 0$$

Substitution: $x^2 = z$

$\Rightarrow z^2 - 32z + 256 = 0$

$\Rightarrow p = -32\,;\, q = 256$

$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 256 - 256 = 0$

$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} = 16$

$z = x^2 = 16 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-4\,;\,4\}}}$

4c **Aufgabe**

Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.

$x^4 + 2x^3 + x^2 = 0$

A4c **Ausführliche Lösung**

$$x^4 + 2x^3 + x^2 = 0$$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 + 2x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow p = 2\,;\, q = 1$

$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{p}{2} = -1$

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-1; 0\}}}$

5a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = 0$

A5a	**Ausführliche Lösung**

$$x^4 + 4x^3 - 16x - 16 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 1 & 4 & 0 & -16 & -16 & \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{12} & \underline{+24} & \underline{+16} & \Rightarrow x_1 = 2 \\ & 1 & 6 & 12 & 8 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 1 & 6 & 12 & 8 & \\ x=-2 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{-8} & \underline{-8} & \Rightarrow x_2 = -2 \\ & 1 & 4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$\text{Restpolynom}: x^2 + 4x + 4 = 0$

$p = 4 \quad ; \quad q = 4$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{p}{2} = -2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2 ; 2\}}}$$

Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = 2 und x = -2.
Da die Diskriminante D = 0 ist, gibt es für die quadratische Gleichung nur eine doppelte Lösung x = -2. Diese Lösung war bereits schon vorhanden, so dass durch die Lösung der quadratischen Gleichung keine mehr dazu kommt.

5b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

A5b	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow z^2 - 6z + 8 = 0$ $\Rightarrow p = -8\,;\, q = 7$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - 7 = 9$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\middle|\; \begin{array}{l} z_1 = 4 + 3 = 7 \\ z_2 = 4 - 3 = 1 \end{array}$ Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 7 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{7}$ $z_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\sqrt{7}\,;\,-1;\,1;\,\sqrt{7}\right\}}}$

5c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.
	$x^4 - 4x^3 + \frac{15}{4}x^2 + x - 1 = 0$ x = 2 ist doppelte Lösung

A5c **Ausführliche Lösung**

$$x^4 - 4x^3 + \frac{15}{4}x^2 + x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & \frac{15}{4} & 1 & -1 \\
x = 2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{-\frac{16}{4}} & \underline{-\frac{1}{2}} & +\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \\
 & 1 & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
 & 1 & -2 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\
x = 2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{0} & \underline{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x_2 = 2 & \\
 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 &
\end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 - \frac{1}{4} = 0 \mid + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \mid \sqrt{} \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right\}}}$$

6a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $x^4 - 8x^3 + 12x^2 = 0$

A6a	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 8x^3 + 12x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 8x + 12\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$ $x^2 - 8x + 12 = 0$ $\Rightarrow p = -8 \,;\, q = 12$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - 12 = 4$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$ $\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left\vert\; \begin{array}{l} x_3 = 4 + 2 = 6 \\ x_4 = 4 - 2 = 2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\,;2\,;6\}}}$

6b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$

A6b	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow z^2 - 6z + 9 = 0$ $\Rightarrow p = -6 \,;\, q = 9$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} = 3$ Rücksubstitution: $z = x^2 = 3 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right\}}}$

6c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $3x^4 + (x^2+4)(x^2-4) = 0$

A6c	**Ausführliche Lösung**
	$3x^4 + (x^2+4)(x^2-4) = 0$ $\Leftrightarrow 3x^4 + \left(x^4 - \cancel{4x^2} + \cancel{4x^2} - 16\right) = 0$ $\Leftrightarrow 4x^4 - 16 = 0 \mid +16$ $\Leftrightarrow 4x^4 = 16 \mid :4$ $\Leftrightarrow x^4 = 4 \mid \sqrt[4]{} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{4} = \pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow L = \left\{-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right\}$

7a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $x^4 - 4kx^3 + (4k^2-16)x^2 = 0$

A7a	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 4kx^3 + (4k^2-16)x^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 4kx + 4k^2 - 16\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$ $x^2 - 4kx + 4k^2 - 16 = 0$ $\Rightarrow p = -4k\,;\, q = 4k^2 - 16$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4k^2 - 4k^2 + 16 = 16$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$ $\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\Big\vert\; \begin{matrix} x_3 = 2k+4 \\ x_4 = 2k-4 \end{matrix}$ $\Rightarrow L = \{0\,; 2k+4\,; 2k-4\}$

7b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.
	$\frac{1}{k}x\left(x^2+4k\right)=0;k<0$

A7b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{k}x\left(x^2+4k\right)=0 \mid \cdot k$
	$\Leftrightarrow x\left(x^2+4k\right)=0 \Rightarrow x_1=0$
	$\Leftrightarrow x^2+4k=0 \mid -4k$
	$\Leftrightarrow x^2=-4k \mid \sqrt{}$
	$\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{-4k}=\pm2\sqrt{-k}$
	$\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-2\sqrt{-k}\,;0\,;2\sqrt{-k}\right\}}}$
	Da per Definition k negativ sein soll, ist -k immer positiv, so dass die Wurzel gezogen werden kann.

7c	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.
	$\frac{2}{k^2}x^4+\frac{1}{2k}x^3=0;k\neq0$

A7c	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{2}{k^2}x^4+\frac{1}{2k}x^3=0 \mid \cdot k^2$
	$\Leftrightarrow 2x^4+\frac{1}{2}kx^3=0$
	$\Leftrightarrow x^3\left(2x+\frac{1}{2}k\right)=0 \Rightarrow x_{1/2/3}=0$
	$2x+\frac{1}{2}k=0 \mid -\frac{1}{2}k$
	$\Leftrightarrow 2x=-\frac{1}{2}k \mid \cdot\frac{1}{2}$
	$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}k$
	$\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{0\,;-\frac{1}{4}k\right\}}}$

8a	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von k. $\left(x^2-1\right)\left(x^2-3k\right)=0$

A8a	**Ausführliche Lösung**
	$\left(x^2-1\right)\left(x^2-3k\right)=0$ $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 1$ $x^2-3k=0 \mid +3k$ $\Leftrightarrow x^2=3k \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{3k}\ ; k\geq 0$ $k>0 \Rightarrow L=\left\{-1;1;-\sqrt{3k}\ ;\sqrt{3k}\right\}$ $k=0 \Rightarrow L=\left\{-1;0\ ;1\right\}$ $k<0 \Rightarrow L=\left\{-1;1\right\}$
	Falls k positiv ist, gibt es 4 Lösungen. Für k = 0 gibt es drei Lösungen da die Wurzel 0 ist. Für negative Werte von k gibt es zwei Lösungen da die Wurzel nicht lösbar ist.

8b	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von k. $\left(x+k\right)^2\left(x^2-2x+2k\right)=0$

A8b	**Ausführliche Lösung**
	$\left(x+k\right)^2\left(x^2-2x+2k\right)=0$ $\left(x+k\right)\left(x+k\right)=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=-k$ $x^2-2x+2k=0$ $\Rightarrow p=-2\,;\,q=2k$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1-2k$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1-2k}$ $D=0 \Leftrightarrow 1-2k=0 \Leftrightarrow 2k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_{3/4}=-\frac{p}{2}=1 \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-k\,;1\}}}$ $D=<0 \Leftrightarrow 1-2k<0 \Leftrightarrow 2k>1 \Leftrightarrow k>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_{3/4}$ keine Lösung $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-k\}}}$ $D>0 \Leftrightarrow 1-2k>0 \Leftrightarrow 2k<1 \Leftrightarrow k<\frac{1}{2}$ $\Rightarrow x_{3/4}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left\vert\;\begin{array}{l}x_3=1+\sqrt{1-2k}\\x_4=1-\sqrt{1-2k}\end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-k\,;1-\sqrt{1-2k}\,;1+\sqrt{1-2k}\right\}}}$
	Die Lösungen sind von der Formvariablen k abhängig. Die Diskriminante D gibt Auskunft über die speziellen Werte von k für die es entweder eine, zwei oder drei Lösungen gibt.

9	**Aufgabe**
	Gegeben ist die Gleichung: $x^4 - 2kx^3 - 3x^2 + 6kx = 0$ x = 2k ist eine Lösung. Berechnen Sie weitere Lösungen.

A9	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 2kx^3 - 3x^2 + 6kx = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^3 - 2kx^2 - 3x + 6k\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x^3 - 2kx^2 - 3x + 6k = 0$ $x = 2k \left\vert \begin{array}{cccc} 1 & -2k & -3 & 6k \\ \downarrow & \underline{+2k} & \underline{0} & \underline{-6k} \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right.$ $\text{Restpolynom}: x^2 - 3 = 0 \mid +3$ $\Leftrightarrow x^2 = 3 \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\sqrt{3}\,; 0\,; \sqrt{3}\,; 2k\right\}}}$
	Der Satz vom Nullprodukt wird angewendet. Mit dem Horner-Schema und der bekannten Lösung x = 2k wird das Restpolynom bestimmt und daraus die weiteren Lösungen.

10	**Aufgabe**
	Welche Anzahl an Lösungen sind möglich? $x^5 - 2x^3 - 4k^2x = 0$

A10	**Ausführliche Lösung**
	$x^5 - 2x^3 - 4k^2x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^4 - 2x^2 - 4k^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x^4 - 2x^2 - 4k^2 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow z^2 - 2z - 4k^2 = 0$ $\Rightarrow p = -2\,;\, q = -4k^2$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 4k^2 > 0$ für alle k $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1+4k^2}$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{vmatrix} z_1 = 1 + \sqrt{1+4k^2} \\ z_2 = 1 - \sqrt{1+4k^2} \end{vmatrix}$ Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 1 + \sqrt{1+4k^2} \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{1+\sqrt{1+4k^2}}$ $z_2 = x^2 = 1 - \sqrt{1+4k^2} \Rightarrow x_{4/5} = \pm\sqrt{z_2}$ Die Wurzel aus z_2 ist nur dann lösbar, wenn z_2 größer oder gleich Null ist. $z_2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+4k^2} = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{1+4k^2} = 1 \,\|^2 \Leftrightarrow 1 + 4k^2 = 1 \,\| -1$ $\Leftrightarrow 4k^2 = 0 \Leftrightarrow k = 0$ falls $k = 0 \Rightarrow z_2 = 0 \Leftrightarrow x_{4/5} = x_1 = 0$ $z_2 > 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+4k^2} > 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{1+4k^2} < 1 \,\|^2 \Leftrightarrow 1 + 4k^2 < 1 \,\| -1$ $\Leftrightarrow 4k^2 < 0$ ist nicht möglich $z_2 < 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1+4k^2} < 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{1+4k^2} > 1 \,\|^2 \Leftrightarrow 1 + 4k^2 > 1 \,\| -1$ $\Leftrightarrow 4k^2 > 0$ ist für alle k erfüllt.
	Die Polynomgleichung hat immer drei Lösungen. x_1 =0 und $x_{2/3}$ = Wurzel aus z_1 existieren für alle Werte von k. Zu untersuchen ist, ob $x_{4/5}$ = Wurzel aus z_2 existiert. Falls z_2 = 0 ist, gilt $x_{4/5}$ = x_1 = 0, also keine neue Lösung. Für den Fall z_2 größer Null gäbe es weitere Lösungen. Die Rechnung zeigt, dass z_2 nicht größer als Null sein kann. Deshalb gibt es außer den drei vorhandenen, keine weitere Lösung.

11	**Aufgabe**
	Die Gleichung $x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0$ hat für $-2 \le x \le 2$ 3 ganzzahlige Lösungen. Bestimmen Sie alle Lösungen.

A11 Ausführliche Lösung

$$x^4 - \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrl}
 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 1 & \\
x=1 & \downarrow & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & +1 & \Rightarrow x_1 = 1 \\
\hline
 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 & \\
x=2 & \downarrow & 2 & +\frac{6}{2} & +1 & \Rightarrow x_2 = 2 \\
\hline
 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 &
\end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{3}{2};\ q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{16} - \frac{8}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \\ x_4 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 1; 2\right\}}}$$