Lösungen Polynomgleichungen VI

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$-\frac{1}{16}x^4 + x^2 - 3 = 0 \Rightarrow L = \{-4\,;0\,;3\}$
	b)	$\frac{k}{2}x^4 - kx^3 - \frac{3k}{2}x^2 = 0 \Rightarrow L = \{-1;0\,;3\}$
	c)	$\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2 - 3k\right) = 0 \Rightarrow L = \left\{-k\sqrt{3}\,;0\,;k\sqrt{3}\right\}$

E2	Ergebnisse	
	a)	$x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \Rightarrow L = \{-5;-1;1;5\}$
	b)	$-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow L = \left\{-2;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;2\right\}$
	c)	$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow L = \left\{-\sqrt{3}-1;-\sqrt{3}+1;\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+1\right\}$

E3	Ergebnisse	
	a)	$-\frac{1}{16}x^4 + x^2 - 3 = 0 \Rightarrow L = \left\{-2\sqrt{3}\,;-2\,;2\,;2\sqrt{3}\right\}$
	b)	$\frac{1}{3}\left(x^2 - 3\right)^2 - 3 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{6}\,;0\,;\sqrt{6}\right\}$
	c)	$\frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right\}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{5}\left(2x^2 - 4\right)^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right\}$
	b)	$-\frac{1}{4}\left(x^4 - x^2\right) + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow L = \{-2;-1;1;2\}$
	c)	$\left(3x^2 - 2k\right)^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{\frac{2}{3}k}\,;\sqrt{\frac{2}{3}k}\right\}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$x^4 - 11x^2 + 18 = 0 \Rightarrow L = \left\{-3\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;3\right\}$
	b)	$x^4 - \left(k+2\right)x^2 + 2k = 0$ $\Rightarrow L = \left\{-\sqrt{k}\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{k}\right\}$
	c)	$x^4 + kx^2 - 2k^2 = 0 \Rightarrow L = \left\{-\sqrt{k}\,;\sqrt{k}\right\}$

E6	Ergebnis
	$k = 4 \quad \Rightarrow L = \{-2\,;-1;1;2\}$

E7	Ergebnis
	$k = -4 \quad \Rightarrow L = \{-1;1\}$

E8	Ergebnis
	Substitution: $z := x^2$ liefert eine quadratische Gleichung mit $D = -\frac{3}{4} - a^2 < 0$

E9	Ergebnis
	$\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{4x}{3}\right)^4 - 4x \cdot \left(\frac{4x}{3}\right)^3 - 192 = 0 \Rightarrow L = \{-3\,;3\}$

E10	Ergebnis
	$x^4 = \frac{9k^2}{k-1} \Rightarrow$ für $k > 1$ gibt es Lösungen.

E11	Ergebnis
	$x^4 + 2kx^3 - 3x^2 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$ $L = \left\{-k - \sqrt{k^2+3}\,;0\,;-k + \sqrt{k^2+3}\right\}$

E12	Ergebnis
	Gleichung 4. Grades mit vier Lösungen: $(x+2)(x+1)(x-3)(x+4) = 0$ Gleichung 4. Grades mit drei Lösungen: $(x-2)(x-2)(x-3)(x+4) = 0$ Gleichung 4. Grades mit zwei Lösungen: $(x+2)(x+2)(x+2)(x-2) = 0$ Gleichung 4. Grades mit einer Lösung: $(x-2)(x-2)(x-2)(x-2) = 0$

Ausführliche Lösungen

1a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung. $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0\,;k\neq 0$

A1a	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0\mid\cdot 9k$ $\Leftrightarrow x^4+x^3-12x^2=0$ $\Leftrightarrow x^2\left(x^2+x-12\right)=0\Rightarrow x_{1/2}=0$ $x^2+x-12=0$ $\Rightarrow p=-1;q=-12$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+\frac{48}{4}=\frac{49}{4}$ $\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left\vert\begin{array}{l}x_3=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=3\\ x_4=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}=-4\end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-4;0;3\}}}$
	Aus der Polynomgleichung kann x^2 ausgeklammert werden. Es entsteht ein Produkt. Da dieses aber Null ist, kann der Satz vom Nullprodukt angewendet werden, der da lautet: "Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist." Die Lösung der Gleichung findet man also dadurch, dass man jeden Faktor für sich gleich Null setzt. Der erste Faktor ergibt die doppelte Lösung 0. Der zweite Faktor ist eine quadratische Gleichung, die mit der p-q-Formel zu lösen ist. In der Lösungsmenge erscheint die doppelte 0 nur einmal, da in der Mengendarstellung per Definition jedes Element nur einmal vorkommen darf.

1b Aufgabe

Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.

$$\frac{k}{2}x^4 - kx^3 - \frac{3k}{2}x^2 = 0\,;\, k \neq 0$$

A1b Ausführliche Lösung

$$\frac{k}{2}x^4 - kx^3 - \frac{3k}{2}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k\left(\frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2\right) = 0 \,|\, : k$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0 \,|\, \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow p = -2\,;\, q = -3$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_3 = 1 + 2 = 3 \\ x_4 = 1 - 2 = -1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-1\,;\,0\,;\,3\}}}$$

Die Polynomgleichung kann nach ausklammern von k durch k dividiert werden, da k per Definition ungleich Null ist. Damit hat k keinen Einfluss auf die Lösung. x^2 lässt sich ebenfalls ausklammern, so dass die Lösungen nach dem Satz vom Nullprodukt bestimmt werden können.

1c Aufgabe

Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichung.

$$\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2 - 3k\right) = 0\,;\, k > 0$$

A1c Ausführliche Lösung

$$\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2 - 3k^2\right) = 0 \,|\, \cdot 5k^2$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 - 3k^2\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$x^2 - 3k^2 = 0 \,|\, +3k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 3k^2 \,|\, \sqrt{\;} \Leftrightarrow x_{3/4} = \pm k\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-k\sqrt{3}\,;\,0\,;\,k\sqrt{3}\right\}}}$$

2a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

A2a	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 26x^2 + 25 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow z^2 - 26z + 25 = 0$ $\Rightarrow p = -26\,;\, q = 25$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 169 - 25 = 144$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{144} = 12$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{vmatrix} z_1 = 13 + 12 = 25 \\ z_2 = 13 - 12 = 1 \end{vmatrix}$ Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 25 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 5$ $z_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-5\,;\, -1;\, 1;\, 5\}}}$
	Die Polynomgleichung stellt eine biquadratische Gleichung dar. Die Substitutionsvariable z lässt sich mithilfe der p-q-Formel berechnen. Anschließend muss zurücksubstituiert und die Wurzel gezogen werden. Die Wurzel lässt sich nur für positive z-Werte lösen.

2b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

A2b	**Ausführliche Lösung**
	$-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}z^2 + 3z - 4 = 0 \mid \cdot(-2)$ $\Leftrightarrow z^2 - 6z + 8 = 0$ $\Rightarrow p = -6\,;\, q = 8$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\lvert \begin{array}{l} z_1 = 3 + 1 = 4 \\ z_2 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$ Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$ $z_2 = x^2 = 2 \Rightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-2\,;\, -\sqrt{2}\,;\, \sqrt{2}\,;\, 2\right\}}}$

2c Aufgabe

Lösen Sie die Gleichung nach x auf.

$$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

A2c Ausführliche Lösung

$$\frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 2 = 0$$

Substitution: $x^2 = z$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}z^2 - 4z + 2 = 0 \,|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z + 4 = 0$$

$$\Rightarrow p = -8\,;\, q = 4$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - 4 = 12$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} z_1 = 4 + 2\sqrt{3} \\ z_2 = 4 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = x^2 = 4 + 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \pm\left(\sqrt{3} + 1\right) \Rightarrow x_1 = \sqrt{3} + 1;\, -\sqrt{3} - 1$$

$$z_2 = x^2 = 4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = \pm\left(\sqrt{3} - 1\right) \Rightarrow x_1 = \sqrt{3} - 1;\, -\sqrt{3} + 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\sqrt{3} - 1;\, -\sqrt{3} + 1;\, \sqrt{3} - 1;\, \sqrt{3} + 1\right\}}}$$

Nach der Rücksubstitution kann man den Term mit Hilfe der binomischen Formeln in ein Quadrat verwandeln, aus dem die Wurzel gezogen werden kann.

3a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $-\frac{1}{16}x^4 + x^2 - 3 = 0$

A3a	**Ausführliche Lösung**
	$-\frac{1}{16}x^4 + x^2 - 3 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow -\frac{1}{16}z^2 + z - 3 = 0 \mid \cdot(-16)$ $\Leftrightarrow z^2 - 16z + 48 = 0$ $\Rightarrow p = -16\,;\, q = 48$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 64 - 48 = 16$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\Big\vert\; \begin{matrix} z_1 = 8 + 4 = 12 \\ z_2 = 8 - 4 = 4 \end{matrix}$ Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 12 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ $z_2 = x^2 = 4 \Rightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-2\sqrt{3}\,;\,-2\,;\,2\,;\,2\sqrt{3}\right\}}}$

3b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

A3b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0 \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow \left(x^2-3\right)^2-9=0$ $\Leftrightarrow x^4-6x^2+9-9=0$ $\Leftrightarrow x^4-6x^2=0$ $\Leftrightarrow x^2\left(x^2-6\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$ $x^2-6=0 \mid +6$ $\Leftrightarrow x^2=6 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{6}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{6}\,;0\,;\sqrt{6}\right\}}}$

3c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$

A3c	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Rightarrow \frac{1}{3}z^2-2z+3=0 \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow z^2-6z+9=0$ $\Rightarrow p=-6\,;q=9$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$ $\Rightarrow z_{1/2}=-\frac{p}{2}=3$ Rücksubstitution: $z=x^2=3 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right\}}}$

4a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $\frac{1}{5}\left(2x^2-4\right)^2=0$

A4a	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{5}\left(2x^2-4\right)^2=0 \mid \cdot 5$ $\Leftrightarrow \left(2x^2-4\right)^2=0$ $\Leftrightarrow \left(2x^2-4\right)\left(2x^2-4\right)=0$ $\Leftrightarrow 2x^2-4=0 \mid +4$ $\Leftrightarrow 2x^2=4 \mid :2$ $\Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right\}}}$
	Der Term kann als Produkt zweier Faktoren geschrieben werden. Da beide Faktoren gleich sind, genügt es nur einen davon gleich Null zu setzen, da der andere Faktor die gleiche Lösung hat. Damit hat die Polynomgleichung insgesamt zwei Lösungen, die doppelt auftreten.

4b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $-\frac{1}{4}\left(x^4-x^2\right)+x^2-1=0$

A4b	**Ausführliche Lösung**
	$-\frac{1}{4}\left(x^4-x^2\right)+x^2-1=0$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^2+x^2-1=0$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-1=0 \mid \cdot(-4)$ $\Leftrightarrow x^4-5x^2+4=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Rightarrow z^2-5z+4=0$ $\Rightarrow p=-5\,;\,q=4$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left\vert \begin{array}{l} z_1=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4 \\ z_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \end{array}\right.$ Rücksubstitution: $z_1=x^2=4 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{4}=\pm2$ $z_2=x^2=1 \Rightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{1}=\pm1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2\,;-1;1;2\}}}$

4c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $\left(3x^2-2k\right)^2=0\,;\,k>0$

A4c	**Ausführliche Lösung**
	$\left(3x^2-2k\right)^2=0$ $\Leftrightarrow\left(3x^2-2k\right)\left(3x^2-2k\right)=0$ $\Leftrightarrow 3x^2-2k=0\mid+2k$ $\Leftrightarrow 3x^2=2k\mid:3$ $\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}k\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}k}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}k}\,;\,\sqrt{\frac{2}{3}k}\right\}}}$
	Der Term kann als Produkt zweier Faktoren geschrieben werden. Da beide Faktoren gleich sind, genügt es nur einen davon gleich Null zu setzen, da der andere Faktor die gleiche Lösung hat. Damit hat die Polynomgleichung insgesamt zwei Lösungen, die doppelt auftreten. Da per Definition die Formvariable k > 0 sein soll, gilt die Lösung für jeden Wert von k, solange er größer als Null ist.

5a	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

A5a	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow z^2 - 11z + 18 = 0$ $\Rightarrow p = -11;\, q = 18$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{121}{4} - \frac{72}{4} = \frac{49}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{vmatrix} z_1 = \frac{11}{2} + \frac{7}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{11}{2} - \frac{7}{2} = 2 \end{vmatrix}$ Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ $z_2 = x^2 = 2 \Rightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-3\,;\, -\sqrt{2}\,;\, \sqrt{2}\,;\, 3\right\}}}$

5b	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $x^4-(k+2)x^2+2k=0\,;k>0$

A5b	**Ausführliche Lösung**
	$x^4-(k+2)x^2+2k=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Rightarrow z^2-(k+2)z+2k=0$ $\Rightarrow p=-(k+2);\,q=2k$ $\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}k-1\Rightarrow\left(\frac{p}{2}\right)^2=(-1)^2\left(\frac{1}{2}k+1\right)^2$ $=\left(\frac{1}{2}k+1\right)^2=\frac{1}{4}k^2+k+1$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}k^2+k+1-2k$ $=\frac{1}{4}k^2-k+1=\left(\frac{1}{2}k-1\right)^2$ $\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}k-1\right)^2}=\frac{1}{2}k-1$ $\Rightarrow z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left\vert\ \begin{array}{l} z_1=\frac{1}{2}k+1+\frac{1}{2}k-1=k \\ z_2=\frac{1}{2}k+1-\left(\frac{1}{2}k-1\right)=2 \end{array}\right.$ Rücksubstitution: $z_1=x^2=k\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{k}$ $z_2=x^2=2\Rightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-\sqrt{k}\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{k}\right\}}}$

5c	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. $x^4 + kx^2 - 2k^2 = 0\,;\, k > 0$

A5c	**Ausführliche Lösung**
	$x^4 + kx^2 - 2k^2 = 0$ Substitution: $x^2 = z$ $\Rightarrow z^2 + kz - 2k^2 = 0$ $\Rightarrow p = k\,;\, q = -2k^2$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4}k^2 + \frac{8}{4}k^2 = \frac{9}{4}k^2$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}k^2} = \frac{3}{2}k$ $\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\vert \begin{array}{l} z_1 = -\frac{1}{2}k + \frac{3}{2}k = k \\ z_2 = -\frac{1}{2}k - \frac{3}{2}k = -2k \end{array} \right.$ Rücksubstitution: $z_1 = x^2 = k \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{k}$ $z_2 = x^2 = -2k \Rightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow L = \left\{-\sqrt{k}\,;\, \sqrt{k}\right\}$
	Es gibt für die Polynomgleichung nur zwei Lösungen. Für z_2 =-2k gibt es keine Lösung, da der Wert für alle k > 0 negativ ist. Aus einer negativen Zahl lässt sich keine Wurzel ziehen.

6	**Aufgabe**
	Für welchen Wert von k hat die Gleichung $-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{4}k=0$ die Lösung $x=1$? Berechnen Sie für diesen Fall die weiteren Lösungen.

A6 Ausführliche Lösung

$$-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{4}k=0\,|\cdot(-4)$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+k=0$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -5 & 0 & k \\ x=1 & \downarrow & \underline{+1} & \underline{+1} & \underline{-4} & \underline{-4} \\ & 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow k-4=0 \Leftrightarrow k=4$$

$$x^4-5x^2+4=0$$

Substitution: $x^2=z$

$$\Rightarrow z^2-5z+4=0$$

$$\Rightarrow p=-5\,;q=4$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l} z_1=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4 \\ z_2=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=1 \end{array}\right.$$

Rücksubstitution:

$$z_1=x^2=4\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{4}=\pm2$$

$$z_2=x^2=1\Rightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{1}=\pm1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2\,;-1;1;2\}}}$$

Da die Lösung x = 1 bekannt ist, kann man mit dem Horner-Schema den Wert für k bestimmenn. Die letzte Spalte im Horner-Schema muss in der Addition Null ergeben, damit x = 1 Lösung der Polynomgleichung ist. Aus der Addition ergibt sich für k der Wert k = 4. Setzt man für k die 4 in die Polynomgleichung ein, kann man sie als biquadratische Gleichung lösen.

7	**Aufgabe**
	Für welchen Wert von k hat die Gleichung $x^4 + 3x^2 + k = 0$ die Lösung $x = -1$? Berechnen Sie für diesen Fall die weiteren Lösungen.

A7 Ausführliche Lösung

$$x^4 + 3x^2 + k = 0$$

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 0 & 3 & 0 & k \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{+1} & \underline{-4} & \underline{4} \\ & 1 & -1 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = -4$

$x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

Substitution: $x^2 = z$

$\Rightarrow z^2 + 3z - 4 = 0$

$\Rightarrow p = 3\,;\, q = -4$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1 \\ z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4 \end{array} \right.$$

Rücksubstitution:

$z_1 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$z_2 = x^2 = -4 \Rightarrow$ keine Lösung für z_2

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-1; 1\}}}$

8	**Aufgabe**
	Zeigen Sie: Die Gleichung $x^4 - x^2 + k^2 + 1 = 0$ hat für $k \in \mathbb{R}$ keine Lösung.

A8 Ausführliche Lösung

$$x^4 - x^2 + k^2 + 1 = 0$$

Substitution: $x^2 = z$

$$\Rightarrow z^2 - z + k^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p = -1; q = k^2 + 1$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} - 1 - k^2$$

$$\Rightarrow D = -\frac{3}{4} - k^2 < 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{\ \}}}$$

Die Diskriminante D ist für jeden Wert von k negativ, da k als Quadrat auftritt. Wenn die Gleichung in z keine Lösung hat, dann hat sie auch keine in x.

9	**Aufgabe**
	Lösen Sie nach x auf: $\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{4x}{3}\right)^4 - 4x \cdot \left(\frac{4x}{3}\right)^3 + 192 = 0$

A9 Ausführliche Lösung

$$\frac{9}{4} \cdot \left(\frac{4x}{3}\right)^4 - 4x \cdot \left(\frac{4x}{3}\right)^3 + 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \cdot \frac{4^4}{3^4} x^4 - 4x \cdot \frac{4^3}{3^3} x^3 + 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{64}{9} x^4 - \frac{256}{27} x^4 + 192 = 0 \mid HN = 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{192}{27} x^4 - \frac{256}{27} x^4 + \frac{5184}{27} = 0 \mid \cdot 27$$

$$\Leftrightarrow 192x^4 - 256x^4 + 5184 = 0$$

$$\Leftrightarrow -64x^4 + 5184 = 0 \mid \cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow 64x^4 - 5184 = 0 \mid +5184$$

$$\Leftrightarrow 64x^4 = 5184 \mid : 64$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 81 \mid \sqrt[4]{\ } \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3; 3\}}}$$

10 Aufgabe

Für welche Werte von k hat $\frac{k-1}{k}x^4 = 9k$ Lösungen?

A10 Ausführliche Lösung

$$\frac{k-1}{k}x^4 = 9k \,|\cdot k$$
$$\Leftrightarrow (k-1)x^4 = 9k^2 \,|:(k-1)$$
$$\Leftrightarrow x^4 = \frac{9k^2}{k-1} \text{ für } k-1>0$$
$$\Rightarrow k-1>0 \,|+1 \Leftrightarrow \underline{\underline{k>1}}$$

Der Nenner des Bruches darf nicht 0 werden. Damit scheidet k = 1 aus. Weiterhin darf der Bruch nicht negativ werden, denn die 4. Wurzel ist nur für positive Zahlen definiert. Der Zähler ist wegen k^2 immer positiv. Damit der Bruch positiv ist, muss k > 1 sein.

11 Aufgabe

Gegeben ist die Gleichung $x^4 + 2kx^3 - 3x^2 = 0$
Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von k.

A11 Ausführliche Lösung

$$x^4 + 2kx^3 - 3x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(x^2 + 2k - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2k - 3 = 0$$
$$\Rightarrow p = 2k \,;\, q = -3$$
$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = k^2 + 3$$
$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{k^2+3} > 0 \text{ für alle k}$$
$$\Rightarrow x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_3 = -k + \sqrt{k^2+3} \\ x_4 = -k - \sqrt{k^2+3} \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-k - \sqrt{k^2+3}\,;\, 0\,;\, -k + \sqrt{k^2+3}\right\}}}$$

Es gibt für alle Werte von k immer 3 Lösungen.

12	**Aufgabe**
	Geben Sie eine Gleichung 4. Grades an, die jeweils vier, drei, zwei bzw. eine Lösung besitzt.

A12	**Ausführliche Lösung**
	Die Kombination von Linearfaktoren liefert die jeweils gewünschte Gleichung.
	Vier Lösungen: $(x+2)(x+1)(x-3)(x+4)=0$ $\Leftrightarrow x^4+4x^3-7x^2-34x-24=0$ $\Rightarrow L=\{-4;-2;-1;3\}$ 3 Lösungen: $(x-2)(x-2)(x-3)(x+4)=0$ $\Leftrightarrow x^4-3x^3-12x^2+52x-48=0$ $\Rightarrow L=\{-4;2;3\}$ 2 Lösungen: $(x+2)(x+2)(x+2)(x-2)=0$ $\Leftrightarrow x^4+4x^3-16x-16=0$ $\Rightarrow L=\{-2;2\}$ 1 Lösung: $(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)=0$ $\Leftrightarrow x^4-8x^3+24x^2-32x+16=0$ $\Rightarrow L=\{2\}$