Lösungen Polynomgleichungen IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0 \Rightarrow L=\{-2\}$
	b)	$x^3-x^2-3x-1=0 \Rightarrow L=\{-1;1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\}$

E2	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0 \Rightarrow L=\{-2;1;3\}$
	b)	$-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0 \Rightarrow L=\{3\}$

E3	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0 \Rightarrow L=\{-5;3;5\}$
	b)	$2x^3-x^2-5x-2=0 \Rightarrow L=\left\{-1;-\frac{1}{2};2\right\}$

E4	Ergebnisse	
	a)	$(3x-1)(x+k)^2=0 \Rightarrow L=\left\{-k;\frac{1}{3}\right\}$
	b)	$\frac{2}{3}k\left(x^3-x^2\right)=0 \Rightarrow L=\{0;1\}$

E5	Ergebnisse	
	a)	$\frac{3}{4a}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}ax=0 : a\neq 0 \Rightarrow L=\{-a;0;2a\}$
	b)	$\frac{x}{k}\left(\frac{1}{2}k-x\right)\left(\frac{x+k}{k}\right)=0 ; k\neq 0 \Rightarrow L=\left\{-k;0;\frac{1}{2}k\right\}$

E6	Ergebnisse	
	a)	$\frac{1}{2}kx^3-3kx^2+\frac{5}{2}kx=0 \Rightarrow L=\{0;1;5\}$
	b)	$x^3-4kx^2+3k^2x=0 \Rightarrow L=\{0;k;2k\}$

E7	Ergebnis
	$x^3-2kx^2-2x+k^2x=0 \Rightarrow L=\{k-\sqrt{2};0;k+\sqrt{2}\}$

E8	Ergebnis
	$\frac{1}{2k}x^3+\frac{2}{3}kx^2-2x^2=0 \Rightarrow L=\left\{0\,;\,4k-\frac{4}{3}k^2\right\}$ Für k = 3 gibt es nur eine Lösung.

E9	Ergebnis
	$(x+1)(2x^2-a)=0$ Für a < 0 gibt es eine Lösung. Für a = 0 gibt es zwei Lösungen. Für a > 0 außer a = 1 gibt es drei Lösungen.

E10	Ergebnis
	$\frac{3}{2}x^3-2ax=0$ Für a < 0 gibt es eine Lösung. Für a = 0 gibt es eine Lösung. Für a > 0 gibt es drei Lösungen.

E11	Ergebnis
	$x^3+ax^2-ax-2x=0$ $x_1=0\,;\,x_{2/3}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a+2}$ mit $\frac{1}{4}a^2+a+2>0$ Sonderfall für a = -2: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$

E12	Ergebnis
	$(k+x)(x^2-2)=0 \Rightarrow L=\left\{-k\,;\,-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right\}$

E13	Ergebnis
	$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x+2)=12x^3+7x^2-28x+12=0$

Ausführliche Lösungen

1a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$

A1a Ausführliche Lösung

Um eine Lösung der Polynomgleichung durch raten oder probieren zu finden, kann man entweder den Taschenrechner benutzen oder das Horner-Schema verwenden. Hat man eine Lösung für x z. B. mit dem Taschenrechner gefunden, so muss man auf jeden Fall die Polynomdivision durchführen um das Restpolynom zu finden.
Hat man hingegen mit dem Horner-Schema einen Lösungswert für x gefunden, so lässt sich aus den Koeffizienten das Restpolynom bilden.
Das Horner-Schema liefert also im Schnellverfahren als Abfallprodukt eine Polynomdivision.
Durch raten und probieren erhält man die Lösung x = -2.

$$\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0\mid\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^3+6x^2+12+8=0$$

$$x=-2\left|\begin{array}{cccc} 1 & +6 & 12 & +8 \\ \downarrow & \underline{-2} & \underline{-8} & \underline{-8} \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right.$$

$$1x^2 \quad + \quad 4x \quad + \quad 4 \quad = \quad 0$$

$$\text{Restpolynom}: x^2+4x+4=0$$

$$p=4 \quad ; \quad q=4$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-4=0$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}=-2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2\}}}$$

Da die Diskriminante der quadratischen Gleichung Null ist, hat diese nur eine (doppelte) Lösung und zwar ebenfalls x = -2, wie man bereits geraten hat.
In der Lösungsmenge wird auch nur die -2 als Lösung angegeben.
Insgesamt handelt es sich um eine dreifache Lösung.

1b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

A1b	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten erhält man die Lösung x = -1.

$$x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = -1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -3 & -1 \\ \downarrow & \underline{-1} & \underline{+2} & \underline{+1} \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow p = -2\,;\, q = -1$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = 1 + \sqrt{2} \\ x_3 = 1 - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-1; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right\}}}$$

2a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung.
	$\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

A2a	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten erhält man die Lösung x = 1.
	$\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0 \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0$ $x=1 \left\vert \begin{array}{cccc} 1 & -2 & -5 & +6 \\ \downarrow & \underline{+1} & \underline{-1} & \underline{-6} \\ 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}\right.$ $\text{Restpolynom}: x^2-x-6=0$ $\Rightarrow p=-1; q=-6$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+\frac{24}{4}=\frac{25}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left\vert \begin{array}{l} x_2=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3 \\ x_3=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-2 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2;1;3\}}}$

2b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$

A2b	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten erhält man die Lösung x = 3.

$$-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0\,|\cdot(-4)$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-9=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 0 & -9 \\ x=3 & \downarrow & \underline{+3} & \underline{+3} & \underline{+9} \\ & 1 & +1 & +3 & 0 \end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2+x+3=0$$

$$\Rightarrow p=-1;\, q=-6$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}-3<0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{3\}}}$$

Die erste Zeile im Horner-Schema muss n + 1 Koeffizienten der Polynomgleichung enthalten, wenn der Polynomgrad n ist. Im obigen Beispiel fehlt in der Polynomgleichung der Summand mit dem Exponenten 1 also das x. Im Horner-Schema muss diese Stelle mit 0 aufgefüllt werden.
Das Restpolynom hat keine Lösung, da die Diskriminante D < 0 ist.

3a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

A3a	**Ausführliche Lösung**
	Durch raten erhält man die Lösung x = 3.

$$\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0\,|\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-25x+75=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -25 & 75 \\ x=3 & \downarrow & \underline{+3} & \underline{\;\;0} & \underline{-75} \\ & 1 & 0 & -25 & 0 \end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2-25=0$$

$$\Rightarrow x^2=25\,|\sqrt{\;}\;\Leftrightarrow |x|=\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm 5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-5;3;5\}}}$$

3b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung.
	$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$

A3b Ausführliche Lösung

Durch raten erhält man die Lösung x = -1.

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 = 0 \,|:2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \\ x=-1 & \downarrow & \underline{-1} & \underline{+\frac{3}{2}} & \underline{+1} \\ & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 \end{array}$$

$$\text{Restpolynom}: x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow p = -\frac{3}{2};\, q = -1$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2 \\ x_3 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-1; -\frac{1}{2}; 2\right\}}}$$

4a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $(3x-1)(x+k)^2=0$

A4a	**Ausführliche Lösung**
	$(3x-1)(x+k)^2=0$ $3x-1=0\mid+1 \qquad x+k=0\mid-k$ $\Leftrightarrow 3x=1\mid:3 \qquad \Leftrightarrow x=-k$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-k\,;\frac{1}{3}\right\}}}$ Da die zweite Klammer in Form eines Quadrates auftritt, ist -k eine doppelte Lösung.

4b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{2}{3}k\left(x^3-x^2\right)=0 \quad k\neq 0$

A4b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{2}{3}k\left(x^3-x^2\right)=0$ $\Leftrightarrow \frac{2}{3}kx^2(x-1)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$ $x-1=0\mid+1$ $\Leftrightarrow \quad x_3=1$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{0\,;1\}}}$ Die Formvariable k hat keinen Einfluss auf die Lösung.

5a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{3}{4a}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}ax=0 : a\neq 0$

A5a	**Ausführliche Lösung**
	Aus der Polynomgleichung kann x ausgeklammert werden. Es entsteht ein Produkt. Da dieses aber Null ist, kann der Satz vom Nullprodukt angewendet werden, der da lautet: "Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist." Die Lösung der Gleichung findet man also dadurch, dass man jeden Faktor für sich gleich Null setzt.
	$\frac{3}{4a}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}ax=0 \mid \cdot\frac{4a}{3}$ $\Leftrightarrow x^3-ax^2-2a^2x=0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2-ax-2a^2\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ $x^2-ax-2a^2=0$ $\Rightarrow p=-a\,;\,q=-2a^2$ $\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{a^2}{4}+\frac{8a^2}{4}=\frac{9a^2}{4}$ $\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}}=\frac{3a}{2}=\frac{3}{2}a$ $\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left\vert\;\begin{array}{l} x_2=\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}a=2a \\ x_3=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}a=-a\end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-a\,;0\,;2a\}}}$

5b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{x}{k}\left(\frac{1}{2}k-x\right)\left(\frac{x+k}{k}\right)=0\,;\,k\neq 0$

A5b	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{x}{k}\left(\frac{1}{2}k-x\right)\left(\frac{x+k}{k}\right)=0$ $\Leftrightarrow x\frac{\left(\frac{1}{2}k-x\right)(x+k)}{k^2}=0 \mid \cdot k$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}k-x\right)(x+k)=0 \Rightarrow x_1=0$ $\frac{1}{2}k-x=0 \mid +x \Leftrightarrow \frac{1}{2}k=0$ $x+k=0 \mid -k \Leftrightarrow x=-k$ $\underline{\underline{\Rightarrow L=\left\{-k\,;0\,;\frac{1}{2}k\right\}}}$

6a	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $\frac{1}{2}kx^3 - 3kx^2 + \frac{5}{2}kx = 0 \quad k \neq 0$

A6a	**Ausführliche Lösung**
	$\frac{1}{2}kx^3 - 3kx^2 + \frac{5}{2}kx = 0 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow kx^3 - 6kx^2 + 5kx = 0$ $\Leftrightarrow x\left(kx^2 - 6kx + 5k\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $kx^2 - 6kx + 5k = 0$ $\Leftrightarrow k\left(x^2 - 6x + 5\right)$ $\Rightarrow p = -6 \,;\, q = 5$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 5 = 4$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$ $\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left\vert\; \begin{array}{l} x_2 = 3 + 2 = 5 \\ x_3 = 3 - 2 = 1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\,;1;\,5\}}}$

6b	**Aufgabe**
	Berechnen Sie die Lösungen folgender Gleichung. $x^3 - 4kx^2 + 3k^2x = 0 \quad k \neq 0$

A6b	**Ausführliche Lösung**
	$x^3 - 4kx^2 + 3k^2x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2 - 4kx + 3k^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x^2 - 4kx + 3k^2 = 0$ $\Rightarrow p = -4k \,;\, q = 3k^2$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4k^2 - 3k^2 = k^2$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{k^2} = k$ $\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \;\left\vert\; \begin{array}{l} x_2 = 2k + k = 3k \\ x_3 = 2k - k = k \end{array}\right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \{0\,;k\,;2k\}}}$

7	**Aufgabe**
	Bestimmen Sie die Lösungen für: $x^3 - 2kx^2 - 2x + k^2x = 0 \quad k \neq 0$

A7	**Ausführliche Lösung**
	$x^3 - 2kx^2 - 2x + k^2x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(x^2 - 2kx - 2 + k^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $x^2 - 2kx + k^2 - 2 = 0$ $\Rightarrow p = -2k\,;\, q = k^2 - 2$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = k^2 - \left(k^2 - 2\right) = 2$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\vert \begin{array}{l} x_2 = k + \sqrt{2} \\ x_3 = k - \sqrt{2} \end{array} \right.$ $\Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{k - \sqrt{2}\,;\, 0\,;\, k + \sqrt{2}\right\}}}$

8	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung nach x auf. Für welche Werte von k gibt es nur eine Lösung? $\frac{1}{2k}x^3+\frac{2}{3}kx^2-2x^2=0\,;k\neq 0$

A8 Ausführliche Lösung

$$\frac{1}{2k}x^3+\frac{2}{3}kx^2-2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2k}x^3+\left(\frac{2}{3}k-2\right)x^2=0\,|\cdot 2k$$

$$\Leftrightarrow x^3+\left(\frac{4}{3}k^2-4k\right)x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left[x+\left(\frac{4}{3}k^2-4k\right)\right]=0\Rightarrow x_1=0$$

$$x+\frac{4}{3}k^2-4k=0\,|+4k$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{4}{3}k^2=4k\,|-\frac{4}{3}k^2$$

$$\Leftrightarrow x=4k-\frac{4}{3}k^2$$

$$\Rightarrow L=\left\{0\,;4k-\frac{4}{3}k^2\right\}$$

$$k-\frac{4}{3}k^2=0\Leftrightarrow k\left(4-\frac{4}{3}k\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4-\frac{4}{3}k=0\,|+\frac{4}{3}k\Leftrightarrow 4=\frac{4}{3}k\,|\cdot\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow k=3$$

Die Lösung $x_1=0$ existiert unabhängig von k. Für alle anderen Werte von k gibt es zwei Lösungen, mit Ausnahme von k = 3.

9	**Aufgabe**
	Für welche Werte von a hat die Gleichung $(x+1)(2x^2-a)=0$ eine Lösung, genau zwei oder drei Lösungen?

A9 Ausführliche Lösung

$$(x+1)(2x^2-a)=0$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x_1=0$$

$$2x^2-a=0 \Leftrightarrow 2x^2+0x-a=0$$

$$\Rightarrow p=0\,;\, q=-a$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0+a$$

Eine Lösung falls $D=0 \Leftrightarrow a=0$

Zwei Lösungen falls $D>0 \Leftrightarrow a>0$

Keine Lösung falls $D<0 \Leftrightarrow a<0$

Für die Gesamtlösung bedeutet das:
Eine Lösung gibt es immer (erste Klammer = 0, x_1 = -1).
Die quadratische Gleichung kann in Abhängigkeit von der Diskriminante eine, zwei oder keine Lösung haben.
Falls a < 0 ist, hat die Polynomgleichung nur eine Lösung L = { -1 }.
Falls a = 0 ist, hat die Polynomgleichung zwei Lösungen L = { -1 ; 0 }.
Falls a > 0 ist, hat die Polynomgleichung drei Lösungen.
Damit in diesem Fall auch wirklich 3 unterschiedliche Lösungen vorliegen, darf die Lösung x_1 = -1 nur einmal vorkommen. Zu untersuchen ist also für welche Werte von a die zweite Klammer bei dem x-Wert -1 Null wird.

$$\left[(-1)^2-a\right]=0 \Leftrightarrow 1-a=0 \Leftrightarrow a=1$$

Zusammenfassung:

$a<0$: eine Lösung $L=\{-1\}$.

$a=0$: zwei Lösungen $L=\{-1;0\}$.

falls $a \neq 1$ und $a>0$:

drei Lösungen $L=\{-1;-\sqrt{a}\,;\sqrt{a}\}$.

10	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von a	$\frac{3}{2}x^3 - 2ax = 0$

A10	**Ausführliche Lösung**

$$\frac{3}{2}x^3 - 2ax = 0 \mid \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \frac{4}{3}ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - \frac{4}{3}a\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{3}a = 0 \mid +\frac{4}{3}a$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}a \mid \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}a}$$

$$\Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}a} \text{ falls } a > 0$$

Eine Lösung falls $D = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Zwei Lösungen falls $D > 0 \Leftrightarrow a > 0$

Keine Lösung falls $D < 0 \Leftrightarrow a < 0$

Falls a = 0 ist, gibt es nur eine Lösung L = {0}.
Nun werden die Lösungen der quadratischen Gleichung in Zusammenhang mit der Formvariablen a betrachtet.

$$x^2 + 0x - \frac{4}{3}a = 0$$

$$\Rightarrow p = 0; q = -\frac{4}{3}a$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 + \frac{4}{3}a$$

Falls $D = 0 \Leftrightarrow$ eine Lösung $\Rightarrow a = 0; L = \{0\}$.

Falls $D > 0 \Leftrightarrow$ zwei Lösungen $\Rightarrow a > 0; L = \left\{-\sqrt{\frac{4}{3}a}; \sqrt{\frac{4}{3}a}\right\}$.

Falls $D < 0 \Leftrightarrow$ keine Lösung $\Rightarrow a > 0; L = \{0\}$.

Zusammenfassung:

$a < 0$: eine Lösung $L = \{0\}$.

$a = 0$: eine Lösung $L = \{0\}$.

$a > 0$: drei Lösungen $L = \left\{-\sqrt{\frac{4}{3}a}; 0; \sqrt{\frac{4}{3}a}\right\}$.

11	**Aufgabe**
	Untersuchen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von a $\qquad x^3 + ax^2 - ax - 2x = 0$

A11 Ausführliche Lösung

$$x^3 + ax^2 - ax - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 - (a+2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left[x^2 + ax - (a+2)\right] = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 + ax - (a+2) = 0 \Rightarrow p = a\,;\, q = -(a+2)$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4}a^2 + a + 2$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a + 2} \\ x_3 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a + 2} \end{array} \right.$$

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2 + a + 2 = 0 \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a + 8 = 0$$

$$\Rightarrow p = 4\,;\, q = a$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 8 < 0$$

Aus dem Term lässt sich x ausklammern, so dass nach dem Satz vom Nullprodukt die Lösungen zu bestimmen sind. Die Lösung $x_1 = 0$ gilt unabhängig von a. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung kann, wie die Rechnung zeigt nicht Null werden, damit auch nicht kleiner als Null. Das bedeutet, die quadratische Gleichung hat für jedes a genau zwei Lösungen. Es ist lediglich zu überprüfen ob für einen bestimmten Wert von a die Lösung der quadratischen Gleichung 0 ergibt. In diesem Fall hätte die Polynomgleichung insgesamt nur 2 Lösungen.

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a + 2} \mid -\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a + 2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a + 2} \mid \cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a + 2} \mid^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + a + 2 \Leftrightarrow a = -2$$

$$\Leftrightarrow x_{2/3} - \frac{-2}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(-2)^2 - 2 + 2}$$

$\Leftrightarrow x_2 = 0$ und $x_3 = 2$

Spezialfall: Falls a = -2 ist, hat die Polynomgleichung genau 2 Lösungen.

12 **Aufgabe**

Untersuchen Sie die Lösungen in Abhängigkeit von k $(k+x)(x^2-2)=0\,;k\in\mathbb{R}$

A12 **Ausführliche Lösung**

$$(k+x)(x^2-2)=0$$

$$k+x=0\Rightarrow x_1=-k$$

$$x^2-2=0\Leftrightarrow x^2=2$$

$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{2}\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\left\{-k\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right\}}}\text{ für }k\neq\pm\sqrt{2}$$

Falls k einen der Wurzelwerte annimmt, verringert sich die Anzahl von Lösungen von drei auf zwei.

13 **Aufgabe**

Die Lösung einer Gleichung 3. Grades sind 2/3, 3/4, und -2.
Geben Sie eine Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten an.

A13 **Ausführliche Lösung**

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x+2)=0\,|\cdot 3$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(x-\frac{3}{4}\right)(x+2)=0\,|\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(4x-3)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2-9x-8x+6\right)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2-17+6\right)(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow 12x^3+24x^2-17x^2-34x+6x+12=0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{12x^3+7x^2-28x+12=0}}$$

Zuerst stellt man anhand der vorgegebenen Lösungen die Polynomgleichung als Produkt ihrer Linearfaktoren auf. Um eine Polynomgleichung mit ganzzahligen Koeffizienten zu bekommen multipliziert man nun beide Seiten der Gleichung mit den Nennern der Brüche in den Linearfaktoren. Dabei darf immer nur ein Linearfaktor multipliziert werden. Sobald in den Linearfaktoren keine Brüche mehr auftreten, multipliziert man diese aus und erhält die gesuchte Polynomgleichung.