

Lösungen Exponentialgleichungen V

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse
a)	$e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ Substitution: $u = e^x$ ergibt $u^2 - 3u - 4 = 0$ für $u_1 = 4 \Rightarrow x_1 = \ln(4)$; für $u_2 = -1 \Rightarrow$ keine Lösung
b)	$4 - 3e^{-0,5x} = e^{0,5x}$ $4e^{0,5x} - 3 - e^x = 0$ Substitution: $u = e^{0,5x}$ ergibt $4u - 3 - u^2 = 0$ Lösungen in u : $u_1 = 3$; $u_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 2\ln 3$; $x_2 = 0$

E2	Ergebnisse
a)	$e^{2x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\ln(2)$
b)	$4e^x - \frac{e^{-x}}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\ln(12)$
c)	$(e^{-x} - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x = -\ln(4)$
d)	$-\frac{2}{5}e^{0,5x} + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,611$

E3	Ergebnisse
a)	$2^{x-2} = 23 \Leftrightarrow x = \frac{\ln(23)}{\ln(2)} + 2 \approx 6,52$
b)	$5^{x+3} - 5^{3x-5} = 0 \Leftrightarrow 5^{x+3}(1 - 5^{2x-8}) = 0$ für $x = 4$
c)	$2^x - 3^{x-1} = 3^x - 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^x + 4 \cdot 2^x = 3^x \left(1 + \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x = \frac{4}{3} \cdot 3^x$ $\Leftrightarrow \frac{15}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{4}{15}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 3,26$
d)	$2^{2x-2} - 2^x = 8$; $u = 2^x$ ergibt $0,25u^2 - u - 8 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 8$; $u_2 = -4 \Rightarrow x = 3$
e)	$0,5 \cdot 2^{2+x} - 0,25 = 0 \Leftrightarrow 2^{2+x} = 0,5 \Rightarrow x = \frac{\ln(0,5)}{\ln(2)} - 2 = -3$
f)	$3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10$; $u = 3^x$ ergibt $u^2 - 10u + 9 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 9$; $u_2 = 1$ $\Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = 0$

E4	Ergebnisse
a)	$xe^{kx} - kx = 0$ $x(e^{kx} - k) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = 0$ unabhängig von k ; $\underline{\underline{x_2}} = \frac{\ln(k)}{k}$ für $k > 0$
b)	$e^{kx} - ke^x = 0 : e^x \Rightarrow e^{(k-1)x} = k \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{\ln(k)}{k-1}$ für $k > 0$ und $k \neq 1$
c)	$-2e^{-x} + 2ke^{-2x} = 0$ $-2e^{-2x}(e^x - k) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = \ln(k)$ für $k > 0$

E5	Ergebnisse
a)	$\frac{3}{2}e - \frac{1}{4}e^{-x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = -\ln(6) - 1$
b)	$2e^x - \frac{1}{2}e^{3x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \ln(2)$
c)	$ke^{\frac{1}{k}x} - 4k = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = k \cdot \ln(4)$
d)	$2xe^x = 7x \Rightarrow \underline{\underline{x_1}} = 0 ; \underline{\underline{x_2}} = \ln\left(\frac{7}{2}\right)$
e)	$e^x - 20e^{-x} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \ln(5)$
f)	$\frac{1}{2}e^{2x} + 18e^{-2x} = \frac{13}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_1}} = \ln(3) ; \underline{\underline{x_2}} = \ln(2)$

E6	Ergebnisse
a)	$\left(-\frac{4}{5}e^{2x} + 4\right)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \frac{1}{2}\ln(5)$
b)	$\frac{1}{2}(2 - e^x)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \ln(2)$
c)	$e^x(4 - 2e^x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \ln(2)$
d)	$-ex + 3x^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1}} = 0 ; \underline{\underline{x_2}} = \frac{e}{3}$
e)	$xe^{-x} - ke^{-x} = e^{-x} \Rightarrow \underline{\underline{x}} = k + 1$
f)	$\frac{1}{2}(2k - e^x)^2 = 2k^2 ; k > 0 \Rightarrow \underline{\underline{x}} = \ln(4k)$

E7	Ergebnisse
a)	$(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2 \Rightarrow x = \underline{\underline{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$
b)	$\left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{2-x} = 0 \Rightarrow x = \underline{\underline{-2}}$
c)	$\frac{1}{2}e^x - 8e^{-x} = 3 \Rightarrow x = \underline{\underline{\ln(8)}}$
d)	$1 - \frac{2e^x}{e^x + 3} = 0 \Rightarrow x = \underline{\underline{\ln(3)}}$
e)	$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \Rightarrow x = \underline{\underline{-\ln(2)}}$
f)	$\frac{2}{1+e^x} = -\frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \Rightarrow x = \underline{\underline{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}}$

E8	Ergebnisse
a)	$\frac{2x}{e^x + 1} = 0 \Rightarrow x = \underline{\underline{0}}$
b)	$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \underline{\underline{-2 + \ln(2)}}; x_2 = \underline{\underline{-2}}$
c)	$\frac{e^x}{e^x - 2} = e^x; x \neq \ln 2 \Rightarrow x = \underline{\underline{\ln(3)}}$
d)	$-2e^x - 2e^{-x} + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = \underline{\underline{-\ln(2)}}; x_2 = \underline{\underline{\ln(2)}}$
e)	$(x - k)e^{x+k} = 0 \Rightarrow x = \underline{\underline{k}}$
f)	$\frac{e^x - k}{e^x + k} = 0; k > 0 \Rightarrow x = \underline{\underline{\ln(k)}}$

Wie gehe ich vor?

Wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Exponentialgleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben, dann ist eine Lösung mittels Exponentialvergleich möglich.

In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.

Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Ausführliche Lösungen:

A1	Aufgabe
	Lösen Sie die Gleichungen
	a) $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ b) $4 - 3e^{-0,5x} = e^{0,5x}$

A1	Ausführliche Lösung
	<p>a) $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - 3u - 4 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -3; q = -4$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4$ $= \frac{9}{4} + \frac{16}{4} = \frac{25}{4}$</p> <p>$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ u_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$ $u_1 = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(4) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(4)}}$ $u_2 = -1 \Leftrightarrow e^x = -1$ keine Lösung</p>

A1	Ausführliche Lösung
	<p>b) $4 - 3e^{-0,5x} = e^{0,5x}$ $\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} + 3e^{-\frac{1}{2}x} - 4 = 0$ Substitution: $e^{\frac{1}{2}x} = u \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = u^{-1}$ $\Leftrightarrow u + 3u^{-1} - 4 = 0 \mid \cdot u$ $\Leftrightarrow u^2 + 3 - 4u = 0$ $\Leftrightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -4; q = 3$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 - 3$ $= 4 - 3 = 1$</p> <p>$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = 2 + 1 = 3 \\ u_2 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right.$ $u_1 = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 3 \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(3) \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2 \cdot \ln(3)}}$ $u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \underbrace{\ln(1)}_{=0}$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$</p>

A2	Aufgabe		
Lösen Sie die Gleichungen			
a)	$e^{2x} - 2e^{-x} = 0$	b)	$4e^x - \frac{e^{-x}}{3} = 0$
c)	$(e^{-x} - 1)^2 = 9$	d)	$-\frac{2}{5}e^{0,5x} + e^{-x} = 0$

A2	Ausführliche Lösungen		
a)	$\begin{aligned} e^{2x} - 2e^{-x} &= 0 \mid +2e^{-x} \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= 2e^{-x} \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) &= \ln(2e^{-x}) \\ \Leftrightarrow 2x &= \ln(2) - x \mid +x \\ \Leftrightarrow 3x &= \ln(2) \mid :3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{3}\ln(2) \end{aligned}$	b)	$\begin{aligned} 4e^x - \frac{e^{-x}}{3} &= 0 \mid \cdot 3 \\ \Leftrightarrow 12e^x - e^{-x} &= 0 \mid +e^{-x} \\ \Leftrightarrow 12e^x &= e^{-x} \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow \ln(12) + x &= -x \mid +x - \ln(12) \\ \Leftrightarrow 2x &= -\ln(12) \mid :2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}\ln(12) \end{aligned}$

A2	Ausführliche Lösung		
c)	$\begin{aligned} (e^{-x} - 1)^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow e^{-2x} - 2e^{-x} + 1 &= 9 \mid -9 \\ \Leftrightarrow e^{-2x} - 2e^{-x} - 8 &= 0 \\ \text{Substitution: } e^{-x} = u \Leftrightarrow e^{-2x} = u^2 & \\ \Leftrightarrow u^2 - 2u - 8 &= 0 \\ \text{quadratische Gleichung} & \\ \Rightarrow p = -2; q = -8 & \\ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= \left(-\frac{2}{2}\right)^2 + 8 \\ &= 1 + 8 = 9 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{D} &= \sqrt{9} = 3 \\ u_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = 1 + 3 = 4 \\ u_2 = 1 - 3 = -2 \end{array} \right. \\ u_1 = 4 &\Leftrightarrow e^{-x} = 4 \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow -x &= \ln(4) \mid \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow x &= -\ln(4) \end{aligned}$	$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = 1 + 3 = 4 \\ u_2 = 1 - 3 = -2 \end{array} \right.$ $u_1 = 4 \Leftrightarrow e^{-x} = 4 \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow -x = \ln(4) \mid \cdot (-1)$ $\Leftrightarrow x = -\ln(4)$ <p style="text-align: center;">hat keine Lösung</p>

A2	Ausführliche Lösung	
d)	$\begin{aligned} -\frac{2}{5}e^{0,5x} + e^{-x} &= 0 \mid \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \\ \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5}{2}e^{-x} &= 0 \mid + \frac{5}{2}e^{-x} \\ \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} &= \frac{5}{2}e^{-x} \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x &= \ln\left(\frac{5}{2}\right) - x \mid +x \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}x &= \ln\left(\frac{5}{2}\right) \mid \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \\ \Leftrightarrow x &= \underline{\underline{\frac{2}{3} \ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,611}} \end{aligned}$	<p>Lösungsweg:</p> <p>Nach einfacher algebraischen Umformung (Multiplikation mit $-5/2$) werden die beiden Summanden getrennt, so dass auf jeder Seite der Gleichung logarithmiert werden kann.</p> <p>Durch Logarithmieren mit dem Logarithmus zur Basis e (auch Logarithmus naturalis genannt), entsteht eine Gleichung mit der Variablen x, bei der x nicht mehr im Exponenten vorhanden ist.</p> <p>Die Lösung erhält man, indem die Gleichung nach der Variablen x umgeformt wird.</p>

A3	Aufgabe					
	Lösen Sie die Gleichungen					
a)	$2^{x-2} = 23$	b)	$5^{x+3} - 5^{3x-5} = 0$	c)	$2^x - 3^{x-1} = 3^x - 2^{x+2}$	
d)	$2^{2x-2} - 2^x = 8$	e)	$0,5 \cdot 2^{2+x} - 0,25 = 0$	f)	$3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10$	

A3	Ausführliche Lösung	
a)	$\begin{aligned} 2^{x-2} &= 23 \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow (x-2) \cdot \ln(2) &= \ln(23) \mid : \ln(2) \\ \Leftrightarrow x-2 &= \frac{\ln(23)}{\ln(2)} \mid +2 \\ \Leftrightarrow x &= \underline{\underline{\frac{\ln(23)}{\ln(2)} + 2 \approx 6,524}} \end{aligned}$	<p>Lösungsvariante:</p> $\begin{aligned} 2^{x-2} &= 23 \mid \log_2(\) \\ \Leftrightarrow x-2 &= \log_2(23) \mid +2 \\ \Leftrightarrow x &= \log_2(23) + 2 \\ \text{mit } \log_a(b) &= \frac{\ln(b)}{\ln(a)} \text{ wird} \\ x &= \underline{\underline{\frac{\ln(23)}{\ln(2)} + 2 \approx 6,524}} \end{aligned}$

A3	Ausführliche Lösung	
b)	$\begin{aligned} 5^{x+3} - 5^{3x-5} &= 0 \mid +5^{3x-5} \\ \Leftrightarrow 5^{x+3} &= 5^{3x-5} \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow (x+3) \cdot \ln(5) &= (3x-5) \cdot \ln(5) \mid : \ln(5) \\ \Leftrightarrow x+3 &= 3x-5 \mid -x \\ \Leftrightarrow 3 &= 2x-5 \mid +5 \\ \Leftrightarrow 8 &= 2x \mid :2 \\ \Leftrightarrow 4 &= x \\ \Leftrightarrow x &= \underline{\underline{4}} \end{aligned}$	<p>Lösungsvariante:</p> $\begin{aligned} 5^{x+3} - 5^{3x-5} &= 0 \mid +5^{3x-5} \\ \Leftrightarrow 5^{x+3} &= 5^{3x-5} \mid \log_5(\) \\ \Leftrightarrow x+3 &= 3x-5 \mid -x \\ \Leftrightarrow 3 &= 2x-5 \mid +5 \\ \Leftrightarrow 8 &= 2x \mid :2 \\ \Leftrightarrow 4 &= x \\ \Leftrightarrow x &= \underline{\underline{4}} \end{aligned}$

A3	Ausführliche Lösung
c)	$\begin{aligned} 2^x - 3^{x-1} &= 3^x - 2^{x+2} \mid +2^{x+2} \\ \Leftrightarrow 2^x + 2^{x+2} - 3^{x-1} &= 3^x \mid +3^{x-1} \\ \Leftrightarrow 2^x + 2^{x+2} &= 3^x + 3^{x-1} \\ \Leftrightarrow 2^x + 2^x \cdot 2^2 &= 3^x + 3^x \cdot 3^{-1} \\ \Leftrightarrow 2^x + 4 \cdot 2^x &= 3^x + \frac{1}{3} 3^x \\ \Leftrightarrow 5 \cdot 2^x &= \frac{4}{3} \cdot 3^x \mid :5 \\ \Leftrightarrow 2^x &= \frac{4}{15} \cdot 3^x \mid :3^x \\ \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x} &= \frac{4}{15} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{15} \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) &= \ln\left(\frac{4}{15}\right) \mid : \ln\left(\frac{2}{3}\right) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln\left(\frac{4}{15}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 3,26 \end{aligned}$ <p>Lösungsweg: Die Gleichung wird so umgeformt, dass auf jeder Seite nur Potenzen mit gleichen Basen stehen. Potenzgesetz: Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert. Anwendung des Gesetzes führt dazu, dass es nur noch die Basen 2 und 3 mit dem Exponenten x gibt. Potenzgesetz: Potenzen mit ungleichen Basen aber gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Basen dividiert und den Exponenten beibehält. Logarithmieren beider Seiten führt zum Ergebnis.</p>

A3	Ausführliche Lösung
d)	$\begin{aligned} 2^{2x-2} - 2^x &= 8 \mid +8 \\ \Leftrightarrow 2^{2x-2} - 2^x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^{2x} \cdot 2^{-2} - 2^x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} 2^{2x} - 2^x - 8 &= 0 \mid \cdot 4 \\ \Leftrightarrow 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 32 &= 0 \\ \text{Substitution: } 2^x &= u \Leftrightarrow 2^{2x} = u^2 \\ \Leftrightarrow u^2 - 4u - 32 &= 0 \\ \text{quadratische Gleichung} \\ \Rightarrow p &= -4; q = -32 \\ D &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{4}{2}\right)^2 + 32 \\ &= 4 + 32 = 36 \end{aligned}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{36} = 6$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = 2 + 6 = 8 \\ u_2 = 2 - 6 = -4 \end{array} \right.$ $u_1 = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3}} \text{ denn } 2^3 = 8$ $u_2 = -4 \Leftrightarrow 2^x = -4$ <p style="text-align: right;">hat keine Lösung</p>

A3	Ausführliche Lösung
e)	$0,5 \cdot 2^{2+x} - 0,25 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^{2+x} - \frac{1}{4} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot 2^x - \frac{1}{4} = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - \frac{1}{4} = 0 \mid :2$ $\Leftrightarrow 2^x - \frac{1}{8} = 0 \mid +\frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow x = \underline{\underline{-3}} \text{ denn } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

A3	Ausführliche Lösung
f)	$3^x + 9 \cdot 3^{-x} = 10 \mid -10$ $\Leftrightarrow 3^x + 9 \cdot 3^{-x} - 10 = 0 \mid \cdot 3^x$ $\Leftrightarrow 3^{2x} + 9 - 10 \cdot 3^x = 0$ $\Leftrightarrow 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$ <p>Substitution: $3^x = u \Leftrightarrow 3^{2x} = u^2$</p> $\Leftrightarrow u^2 - 10u + 9 = 0$ <p>quadratische Gleichung</p> $\Rightarrow p = -10; q = 9$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{10}{2}\right)^2 - 9$ $= 25 - 9 = 16$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$ $u_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} \quad \begin{cases} u_1 = 5 + 4 = 9 \\ u_2 = 5 - 4 = 1 \end{cases}$ $u_1 = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}} \text{ denn } 3^2 = 9$ $u_2 = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}} \text{ denn } 3^0 = 1$

A4	Aufgabe		
	Für welche Werte von k hat die Gleichung eine Lösung?		
	a) $xe^{kx} - kx = 0$	b) $e^{kx} - ke^x = 0$	c) $-2e^{-x} + 2ke^{-2x} = 0$

A4	Ausführliche Lösungen		
	a) $x \cdot e^{kx} - k \cdot x = 0 \mid x \text{ ausklammern}$ $\Leftrightarrow x(e^{kx} - k) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\Leftrightarrow e^{kx} - k = 0 \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow k \cdot x = \ln(k) \mid :k$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{k} \ln(k)}} \text{ für } k > 0$	b) $e^{kx} - k \cdot e^x = 0 \mid +k \cdot e^x$ $\Leftrightarrow e^{kx} = k \cdot e^x \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow k \cdot x = \ln(k) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow k \cdot x - x = \ln(k)$ $\Leftrightarrow x(k-1) = \ln(k) \mid :k-1$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{k-1} \ln(k)}} \text{ für } k > 0 \text{ und } k \neq 1$	

A4	Ausführliche Lösung		
	c) $-2e^{-x} + 2k \cdot e^{-2x} = 0 \mid :(-2)$ $\Leftrightarrow e^{-x} - k \cdot e^{-2x} = 0 \mid +k \cdot e^{-2x}$ $\Leftrightarrow e^{-x} = k \cdot e^{-2x} \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow -x = \ln(k) - 2x \mid +2x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{k} \ln(k)}} \text{ für } k > 0$	Lösungsweg: Die Potenzen zur Basis e werden auf unterschiedliche Seiten der Gleichung gebracht, damit die Gleichung logarithmierbar wird. Anwendung der Logarithmengesetze führt zu einer Gleichung in x.	

A5	Aufgaben				
Lösen Sie die Gleichungen					
a)	$\frac{3}{2}e - \frac{1}{4}e^{-x} = 0 +\frac{1}{4}e^{-x}$	b)	$2e^x - \frac{1}{2}e^{3x} = 0 +\frac{1}{2}e^{3x}$	c)	$ke^{\frac{1}{k}x} - 4k = 0 +4k$
d)	$2xe^x = 7x :x$	e)	$e^x - 20e^{-x} = 1 +20e^{-x}$	f)	$\frac{1}{2}e^{2x} + 18e^{-2x} = \frac{13}{2} \cdot 2$

A5	Ausführliche Lösungen				
	a) $\begin{aligned} \frac{3}{2}e - \frac{1}{4}e^{-x} &= 0 +\frac{1}{4}e^{-x} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}e &= \frac{1}{4}e^{-x} \cdot \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow e &= \frac{2}{12}e^{-x} = \frac{1}{6}e^{-x} \ln(\) \\ \Leftrightarrow 1 &= \ln\left(\frac{1}{6}\right) - x +x \\ \Leftrightarrow 1 + x &= \ln\left(\frac{1}{6}\right) -1 \\ \Leftrightarrow x &= \ln\left(\frac{1}{6}\right) - 1 = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(6) - 1 \\ \Leftrightarrow x &= -\ln(6) - 1 \end{aligned}$	b) $\begin{aligned} 2e^x - \frac{1}{2}e^{3x} &= 0 +\frac{1}{2}e^{3x} \\ \Leftrightarrow 2e^x &= \frac{1}{2}e^{3x} :2 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{1}{4}e^{3x} \ln(\) \\ \Leftrightarrow x &= \ln\left(\frac{1}{4}\right) + 3x -3x \\ \Leftrightarrow -2x &= \underbrace{\ln(1) - \ln(4)}_{=0} :(-2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}\ln(4) = \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(\sqrt{4}) = \ln(2) \\ \Leftrightarrow x &= \underline{\underline{\ln(2)}} \end{aligned}$			

A5	Ausführliche Lösungen				
	c) $\begin{aligned} k \cdot e^{\frac{1}{k}x} - 4k &= 0 +4k \\ \Leftrightarrow k \cdot e^{\frac{1}{k}x} &= 4k :k \\ \Leftrightarrow e^{\frac{1}{k}x} &= 4 \ln(\) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{k}x &= \ln(4) \cdot k \\ \Leftrightarrow x &= k \cdot \ln(4) \end{aligned}$	d) $\begin{aligned} 2x \cdot e^x &= 7x -7x \\ \Leftrightarrow 2x \cdot e^x - 7x &= 0 x \text{ ausklammern} \\ \Leftrightarrow x(2 \cdot e^x - 7) &= 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot e^x - 7 &= 0 +7 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot e^x &= 7 :2 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{7}{2} \ln(\) \\ \Leftrightarrow x &= \ln\left(\frac{7}{2}\right) = \ln(7) - \ln(2) \end{aligned}$			

A5 Ausführliche Lösung	
e) $\begin{aligned} e^x - 20e^{-x} &= 1 \mid \cdot e^x \\ \Leftrightarrow e^{2x} - 20 &= e^x \mid -e^x \\ \Leftrightarrow e^{2x} - 20 - e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 20 &= 0 \\ \text{Substitution: } e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2 \\ \Leftrightarrow u^2 - u - 20 &= 0 \\ \text{quadratische Gleichung} \\ \Rightarrow p = -1; q = -20 \\ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 20 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{80}{4} = \frac{81}{4} \end{aligned}$	$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ u_2 = \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \end{array} \right.$ $u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \mid \ln()$ $\Leftrightarrow x = \underline{\underline{\ln(5)}}$ $u_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4$ <p style="text-align: center;">hat keine Lösung</p>

A5 Ausführliche Lösung	
f) $\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{2x} + 18e^{-2x} &= \frac{13}{2} \mid \cdot e^{2x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{4x} + 18 &= \frac{13}{2} \cdot e^{2x} \mid -\frac{13}{2} \cdot e^{2x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{13}{2} \cdot e^{2x} + 18 &= 0 \mid :2 \\ \Leftrightarrow e^{4x} - 13 \cdot e^{2x} + 36 &= 0 \\ \text{Substitution: } e^{2x} = u \Leftrightarrow e^{4x} = u^2 \\ \Leftrightarrow u^2 - 13u + 36 &= 0 \\ \text{quadratische Gleichung} \\ \Rightarrow p = -13; q = 36 \\ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= \left(-\frac{13}{2}\right)^2 - 36 \\ &= \frac{169}{4} + \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \end{aligned}$	$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ u_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{array} \right.$ $u_1 = 9 \Leftrightarrow e^{2x} = 9 \mid \ln()$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(9) \mid :2$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \underline{\underline{\ln(9)}} = \underline{\underline{\ln(3)}}$ $u_2 = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 4 \mid \ln()$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(4) \mid :2$ $\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{\ln(4)}} = \underline{\underline{\ln(2)}}$

Aufgabe					
Lösen Sie die Gleichungen					
a)	$\left(-\frac{4}{5}e^{2x} + 4\right)(x^2 + 1) = 0$	b)	$\frac{1}{2}(2 - e^x)^2 = 0$	c)	$e^x(4 - 2e^x) = 0$
d)	$-ex + 3x^2 = 0$	e)	$xe^{-x} - ke^{-x} = e^{-x}$	f)	$\frac{1}{2}(2k - e^x)^2 = 2k^2 ; k > 0$

Ausführliche Lösungen					
a)	$\left(-\frac{4}{5}e^{2x} + 4\right)(x^2 + 1) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \mid -1$ $\Leftrightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{keine Lösung}$ $\Leftrightarrow -\frac{4}{5}e^{2x} + 4 = 0 \mid -4$ $\Leftrightarrow -\frac{4}{5}e^{2x} = -4 \mid \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)$ $\Leftrightarrow e^{2x} = 5 \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(5) : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2} \cdot \ln(5)}}$	b)	$\frac{1}{2}(2 - e^x)^2 = 0 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow (2 - e^x)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (2 - e^x) \cdot (2 - e^x) = 0$ $\Leftrightarrow 2 - e^x = 0 \mid +e^x$ $\Leftrightarrow 2 = e^x \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow \ln(2) = x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(2)}}$	ist doppelte Nullstelle wegen $(2 - e^x) \cdot (2 - e^x) = 0$	

Ausführliche Lösungen					
c)	$e^x(4 - 2e^x) = 0$ $\Leftrightarrow e^x = 0 \text{ hat keine Lösung}$ $\Leftrightarrow 4 - 2e^x = 0 \mid +2e^x$ $\Leftrightarrow 4 = 2e^x \mid : 2$ $\Leftrightarrow 2 = e^x \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow \ln(2) = x$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(2)}}$	d)	$-e \cdot x + 3x^2 = 0 \mid x \text{ ausklammern}$ $\Leftrightarrow x(3x - e) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ $\Leftrightarrow 3x - e = 0 \mid +e$ $\Leftrightarrow 3x = e \mid : 3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{1}{3}e}}$		

A6	Ausführliche Lösungen	
e)	$\begin{aligned}x \cdot e^{-x} - k \cdot e^{-x} &= e^{-x} \mid -e^{-x} \\ \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} - k \cdot e^{-x} - e^{-x} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-x}(x - k - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{-x} = 0 &\Rightarrow \text{keine Lösung} \\ \Leftrightarrow x - k - 1 &= 0 \mid +1 \\ \Leftrightarrow x - k &= 1 \mid +k \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1+k}} \end{aligned}$	f) $\begin{aligned}\frac{1}{2}(2k - e^x)^2 &= 2k^2 ; k > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2k - e^x)^2 &= 2k^2 \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow (2k - e^x)^2 &= 4k^2 \\ \Leftrightarrow 4k^2 - 4k \cdot e^x + e^{2x} &= 4k^2 \mid -4k^2 \\ \Leftrightarrow -4k \cdot e^x + e^{2x} &= 0 \mid +4k \cdot e^x \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= 4k \cdot e^x \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow 2x &= \ln(4k) + x \mid -x \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(4k)}} \end{aligned}$

A7	Aufgabe Lösen Sie die Gleichungen					
a)	$(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2$	b)	$\left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{2-x} = 0$	c)	$\frac{1}{2}e^x - 8e^{-x} = 3$	
d)	$1 - \frac{2e^x}{e^x + 3} = 0$	e)	$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x}$	f)	$\frac{2}{1+e^x} = -\frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2}$	

A7	Ausführliche Lösungen	
a)	$\begin{aligned}(2 - e^x)^2 &= (x - 3)^2 \\ \Leftrightarrow 4 - 4e^x + e^{2x} &= e^{2x} - 6e^x + 9 \mid -e^{2x} \\ \Leftrightarrow 4 - 4e^x &= -6e^x + 9 \mid +6e^x \\ \Leftrightarrow 4 + 2e^x &= 9 \mid -4 \\ \Leftrightarrow 2e^x &= 5 \mid :2 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{5}{2} \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}} \end{aligned}$	b) $\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot e^{2-x} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2-x} &= 0 \Rightarrow \text{keine Lösung} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 &= 0 \mid \cdot 2 \\ \Leftrightarrow x + 2 &= 0 \mid -2 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -2}} \end{aligned}$

A7	Ausführliche Lösung
c)	$\frac{1}{2}e^x - 8e^{-x} = 3 \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow e^x - 16e^{-x} = 6 \mid \cdot e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x} - 16 = 6e^x \mid -6e^x$ $\Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x - 16 = 0$ <p>Substitution: $e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2$</p> $\Leftrightarrow u^2 - 6u - 16 = 0$ <p>quadratische Gleichung</p> $\Rightarrow p = -6; q = -16$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{6}{2}\right)^2 + 16$ $= 9 + 16 = 25$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{25} = 5$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{array}{l l} u_1 = 3 + 5 = 8 \\ u_2 = 3 - 5 = -2 \end{array}$ $u_1 = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow x = \underline{\underline{\ln(8)}}$ $u_2 = -2 \Leftrightarrow e^x = -2$ $\Rightarrow \text{keine Lösung}$

A7	Ausführliche Lösung
d)	$1 - \frac{2e^x}{e^x + 3} = 0 \mid + \frac{2e^x}{e^x + 3}$ $\Leftrightarrow 1 = \frac{2e^x}{e^x + 3} \mid \cdot (e^x + 3)$ $\Leftrightarrow e^x + 3 = 2e^x \mid -e^x$ $\Leftrightarrow 3 = e^x \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow x = \underline{\underline{\ln(3)}}$ <p>Lösungsweg: Die Summanden werden getrennt. Die Bruchgleichung wird mit dem Nenner der rechten Seite multipliziert. So entsteht eine Gleichung ohne Brüche. Umformen und logarithmieren führt zum Ergebnis.</p>

A7	Ausführliche Lösung
e)	$\begin{aligned} -\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 &= e^{-x} \mid \cdot e^{2x} \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{4} + 5e^{2x} &= e^x \mid -e^x \\ \Leftrightarrow 5e^{2x} - e^x - \frac{3}{4} &= 0 \mid :5 \\ \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{1}{5}e^x - \frac{3}{20} &= 0 \\ \text{Substitution: } e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2 & \\ \Leftrightarrow u^2 - \frac{1}{5}u - \frac{3}{20} &= 0 \\ \text{quadratische Gleichung} & \\ \Rightarrow p = -\frac{1}{5}; q = -\frac{3}{20} & \\ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= \left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{20} \\ &= \frac{1}{100} + \frac{15}{100} = \frac{16}{100} \end{aligned}$ $\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{4}{10}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \\ u_2 = \frac{1}{10} - \frac{4}{10} = -\frac{3}{10} \end{cases}$ $u_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\)$ $\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow x = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(2)}}$ $u_2 = \frac{3}{10} \Leftrightarrow e^x = \frac{-3}{10}$ $\Rightarrow \text{keine Lösung}$

A7	Ausführliche Lösung
f)	$\begin{aligned} \frac{2}{1+e^x} &= -\frac{e^x - 4}{(1+e^x)^2} \mid \cdot (1+e^x) \\ \Leftrightarrow 2 &= -\frac{e^x - 4}{1+e^x} \mid \cdot (1+e^x) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (1+e^x) &= -(e^x - 4) \\ \Leftrightarrow 2 + 2e^x &= -e^x + 4 \mid +e^x \\ \Leftrightarrow 2 + 3e^x &= 4 \mid -2 \\ \Leftrightarrow 3e^x &= 2 \mid :3 \\ \Leftrightarrow e^x &= \frac{2}{3} \mid \ln(\) \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)}} & \end{aligned}$ <p>Lösungsweg:</p> <p>Zweifache Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite lässt den Bruchterm verschwinden. Bei der algebraischen Umformung ist darauf zu achten, dass der Bruchstrich die Klammer ersetzt.</p> <p>Ausmultiplizieren und weitere algebraische Umformungen führen zu einer Gleichung, die sich leicht logarithmieren lässt.</p>

A8	Aufgabe					
	Lösen Sie die Gleichungen					
a)	$\frac{2x}{e^x + 1} = 0$	b)	$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0$	c)	$\frac{e^x}{e^x - 2} = e^x ; x \neq \ln(2)$	
d)	$-2e^x - 2e^{-x} + 5 = 0$	e)	$(x-k)e^{x+k} = 0$	f)	$\frac{e^x - k}{e^x + k} = 0 ; k > 0$	

A8	Ausführliche Lösung					
a)	$\frac{2x}{e^x + 1} = 0 \cdot (e^x + 1)$ $\Leftrightarrow 2x = 0 : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$	Lösungsweg: Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite lässt den Bruchterm verschwinden.				

A8	Ausführliche Lösung					
b)	$e^{2x+4} - 3e^{x+2} + 2 = 0$ Substitution: $e^{x+2} = u \Leftrightarrow e^{2x+4} = u^2$ $\Leftrightarrow u^2 - 3u + 2 = 0$ quadratische Gleichung $\Rightarrow p = -3 ; q = 2$ $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2$ $= \frac{9}{4} + \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$	$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ $u_{1/2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} \quad \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ u_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$ $u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \ln()$ $\Leftrightarrow x + 2 = \ln(2) -2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(2) - 2}}$ $u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \ln()$ $\Leftrightarrow x + 2 = \underbrace{\ln(1)}_{=0} -2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$				

A8	Ausführliche Lösung					
c)	$\frac{e^x}{e^x - 2} = e^x ; x \neq \ln(2)$ $\frac{e^x}{e^x - 2} = e^x \cdot (e^x - 2)$ $\Leftrightarrow e^x = e^{2x} - 2e^x +2e^x$ $\Leftrightarrow 3e^x = e^{2x} \ln()$ $\Leftrightarrow \ln(3) + x = 2x -\ln(3)$ $\Leftrightarrow x = 2x - \ln(3) \cdot (-1)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(3)}}$	Lösungsweg: Die Definitionsmenge ist eingeschränkt, da der Nenner der linken Seite nicht Null werden darf. Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite lässt den Bruchterm verschwinden. Algebraische Umformungen ermöglichen das Logarithmieren.				

A8	Ausführliche Lösung
d)	$\begin{aligned} -2e^x - 2e^{-x} + 5 &= 0 \mid \cdot e^x \\ \Leftrightarrow -2e^{2x} - 2 + 5e^x &= 0 \mid :(-2) \\ \Leftrightarrow e^{2x} - \frac{5}{2}e^x + 1 &= 0 \\ \text{Substitution: } e^x = u \Leftrightarrow e^{2x} = u^2 & \\ \Leftrightarrow u^2 - \frac{5}{2}u + 1 &= 0 \\ \text{quadratische Gleichung} & \\ \Rightarrow p = -\frac{5}{2}; q = 1 & \\ D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{15}{16} + \frac{16}{16} = \frac{9}{16} \end{aligned}$ $\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{D} &= \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \\ u_{1/2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} u_1 = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \\ u_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right. \\ u_1 = 2 &\Leftrightarrow e^x = 2 \mid \ln() \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(2)}} & \\ u_2 = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln() \\ \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2) \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -\ln(2)}} & \end{aligned}$

A8	Ausführliche Lösungen		
e)	$\begin{aligned} (x-k) \cdot e^{x+k} &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{x+k} &= 0 \Rightarrow \text{keine Lösung} \\ \Leftrightarrow x-k &= 0 \mid +k \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = k}} & \end{aligned}$	f)	$\begin{aligned} \frac{e^x - k}{e^x + k} &= 0; k > 0 \\ \frac{e^x - k}{e^x + k} &= 0 \mid \cdot (e^x + k) \\ \Leftrightarrow e^x - k &= 0 \mid +k \\ \Leftrightarrow e^x &= k \mid \ln() \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln(k)}} & \text{für } k > 0 \end{aligned}$

Logarithmengesetze:

Logarithmus eines Produktes	
Logarithmus zur Basis a: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$	Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.
Logarithmus zur Basis 10: $\lg(b \cdot c) = \lg(b) + \lg(c)$	
Logarithmus zur Basis e: $\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln(500) = \ln(5 \cdot 100) = \ln(5) + \ln(100) \approx 6,215$	

Logarithmus eines Quotienten	
Logarithmus zur Basis a: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$	Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen von Dividend (Zähler) und Divisor (Nenner).
Logarithmus zur Basis 10: $\lg\left(\frac{b}{c}\right) = \lg(b) - \lg(c)$	
Logarithmus zur Basis e: $\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln\left(\frac{343}{7}\right) = \ln(343) - \ln(7) \approx 3,892$	

Logarithmus einer Potenz	
Logarithmus zur Basis a: $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$	Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliziert mit dem Exponenten.
Logarithmus zur Basis 10: $\lg(b^c) = c \cdot \lg(b)$	
Logarithmus zur Basis e: $\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln(3^5) = 5 \cdot \ln(3) \approx 5,493$ $\ln(\sqrt{5}) = \ln\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln(5) \approx 0,805$	

Logarithmus von der Basis	
$\log_a(a) = \lg(10) = \ln(e) = 1$	Der Logarithmus zur Basis a von der Basis a ist 1.
Beispiel zum Logarithmus zur Basis e: $\ln(e^{2x}) = 2x \cdot \ln(e) = 2x \cdot 1 = 2x$	
$\log_a(1) = \lg(1) = \ln(1) = 0$	

Logarithmus von der Zahl 1	
$\log_a(1) = \lg(1) = \ln(1) = 0$	Der Logarithmus der Zahl 1 ist in jedem Logarithmensystem gleich Null.

Die wichtigsten Potenzgesetze:

Multiplikation und Division

bei gleichen Basen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$a \in \mathbb{R}$ $m, n \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$a \in \mathbb{R}^*$ $m, n \in \mathbb{Q}$

bei gleichen Exponenten

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$a, b \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Q}$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$a, b \in \mathbb{R}^*$ $n \in \mathbb{Q}$

Potenzieren von Potenzen

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$a \in \mathbb{R}$ $m, n \in \mathbb{Q}$

Radizieren von Potenzen

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$a \in \mathbb{R}_+^*$ $m \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{N}^*$

Folgerungen aus den Potenzgesetzen:

$$a^0 = 1 \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$a \in \mathbb{R}^*$ $n \in \mathbb{Q}$

Logarithmus im Exponenten.

$$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b \Leftrightarrow a^{\log_a(b)} = b \quad \text{Zahlenbeispiel: } 2 = a^{\log_a(2)}$$

Vielfach sind für Termumformungen nebenstehende Beziehungen nützlich.

$$x = \lg(b) \Leftrightarrow 10^x = b \Leftrightarrow 10^{\lg(b)} = b \quad \text{Zahlenbeispiel: } 5 = 10^{\lg(5)}$$

$$x = \ln(b) \Leftrightarrow e^x = b \Leftrightarrow e^{\ln(b)} = b \quad \text{Zahlenbeispiel: } 9 = e^{\ln(9)}$$

$$\text{speziell: } b^x = a^{x \cdot \log_a(b)} = 10^{x \cdot \lg(b)} = e^{x \cdot \ln(b)}$$

Umrechnung von einem Logarithmensystem in ein anderes.

$$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

$$\log_3(5) = \frac{\lg(5)}{\lg(3)} = \frac{\ln(5)}{\ln(3)} \approx 1,4649735$$