Lösungen Exponentialgleichungen I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \Rightarrow x=1-\ln(2)$

E2	Ergebnis
	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

E3	Ergebnis
	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0 \Rightarrow$ keine Lösung

E4	Ergebnis
	$(3+2x)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

E5	Ergebnis
	$-2x^2e^{-x+2}=0 \Rightarrow x=0$

E6	Ergebnis
	$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0 \Rightarrow x_1=\ln(5)$

E7	Ergebnis
	$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow x_1=2\ln(3)$ und $x_2=0$

E8	Ergebnis
	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \Rightarrow x_1=-\ln(2)$

E9	Ergebnis
	$\frac{2x}{e^{x}+1}=0 \Rightarrow x=0$

E10	Ergebnis
	$\left(2-e^{x}\right)^2=\left(e^{x}-3\right)^2 \Rightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

Exponentialgleichungen mit e- Funktionen lösen:
Wenn es gelingt, die Terme auf beiden Seiten der Exponentialgleichung so umzuformen, dass sich Potenzen mit gleichen Basen ergeben, dann ist eine Lösung mittels Exponentialvergleich möglich.
In vielen Fällen führt der Ansatz über das Logarithmieren zum Erfolg.
Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$

A1	Ausführliche Lösung
	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}e^{2-2x}=6 \mid :\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2-2x}=4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4) \mid -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x=\ln(4)-2 \mid :(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x=1-\frac{1}{2}\ln(4)$ $\Leftrightarrow x=1-\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1-\ln(2)}}$ Lösung der Exponentialgleichung durch logarithmieren

A2	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$

A2	Ausführliche Lösung
	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e=1 \mid +\frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{1}{2}e \mid \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x}=4+2e \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \quad 4x=\ln(4+2e) \mid :4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)}}$ Lösung der Exponentialgleichung durch logarithmieren

A3	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0$

A3	Ausführliche Lösung
	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0 \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}-2e^{x+1}=0 \mid +2e^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}=2e^{x+1} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+x+1 \mid -x$ $\Leftrightarrow \quad 0=\ln(2)+1 \mid -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)=-1$ widerspruch $\Leftrightarrow$ keine Lösung Lösung der Exponentialgleichung durch logarithmieren. Wenn ein Widerspruch auftaucht, hat die Exponentialgleichung keine Lösung.

A4	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$\left(3+2x\right)e^{x-1}=0$

A4	Ausführliche Lösung
	$\left(3+2x\right)e^{x-1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3+2x=0 \mid -3$ $\Leftrightarrow \quad 2x=-3 \mid :2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$ e^{x-1} ist die Funktion x^{x} verschoben um 1 EH auf der $x-$Achse nach rechts. Die Funktion e^{x} hat keine Nullstelle. Eine auf der x- Achse verschobene e- Funktion hat keine Nullstelle.

A5	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$-2x^{2}e^{-x+2}=0$

A5	Ausführliche Lösung
	$-2x^{2}e^{-x+2}=0$ $-2x^{2}e^{-x+2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^{2}=0$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}$ e^{-x+2} ist die Funktion e^{-x} verschoben um 2 EH auf der $x-$Achse nach links. Die Funktion e^{-x} hat keine Nullstelle. Eine auf der x- Achse verschobene e- Funktion hat keine Nullstelle

A6	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0$

A6	Ausführliche Lösung
	$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0$ Substitution $u = e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot u$
	$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot (-5) \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + 5u - 50 = 0$
	$p = 5\,;\, q = -50 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} + \frac{200}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$
	$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\lvert \begin{array}{l} u_1 = -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} = 5 \\ u_2 = -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} = -10 \end{array} \right.$
	$u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(5)}}$
	$u_2 = -10 \Leftrightarrow e^x = -10 \Rightarrow$ keine Lösung
	Exponentialgleichungen, in denen Summen oder Differenzen vorkommen, können nicht logarithmiert werden. Man kann versuchen, sie mittels Substitution (Einsetzung einer Ersatzvariablen) zu lösen.

A7	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$

A7	Ausführliche Lösung
	$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$ Substitution $u = e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4 - \frac{3}{u} = u \mid \cdot u$
	$\Leftrightarrow 4u - 3 = u^2 \mid -u^2 \quad \Leftrightarrow \quad -u^2 + 4u - 3 = 0 \mid \cdot (-1) \quad \Leftrightarrow \quad u^2 - 4u + 3 = 0$
	$p = -4\,;\, q = 3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$
	$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left\lvert \begin{array}{l} u_1 = 2 + 1 = 3 \\ u_2 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right.$
	$u_1 = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\ln(3)}}$
	$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(1) \Leftrightarrow x_2 = 2\underbrace{\ln(1)}_{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$
	Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution

A8	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$

A8	Ausführliche Lösung
	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$ Substitution $u=e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2+5=u \mid -u$ $\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2-u+5=0 \mid :\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+\frac{4}{3}u-\frac{20}{3}=0$ $p=\frac{4}{3};q=-\frac{20}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{4}{9}+\frac{60}{9}=\frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \begin{vmatrix} u_1=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2 \\ u_2=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{10}{3} \end{vmatrix}$ $u_1=2 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow -x=\ln(2) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=-\ln(2)}}$ $u_2=-\frac{10}{3} \Leftrightarrow e^{-x}=-\frac{10}{3} \Leftrightarrow -x=\underbrace{\ln\left(-\frac{10}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$ keine Lösung Lösung der Exponentialgleichung durch Substitution

A9	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$\frac{2x}{e^x+1}=0$

A9	Ausführliche Lösung
	$\frac{2x}{e^x+1}=0 \mid \cdot\left(e^x+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}$

A10	**Aufgabe**
	Lösen Sie die Gleichung
	$\left(2-e^x\right)^2=\left(e^x-3\right)^2$

A10	Ausführliche Lösung
	$\left(2-e^x\right)^2=\left(e^x-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-4e^x+e^{2x}=e^{2x}-6e^x+9 \mid -e^{2x}$ $\Leftrightarrow 4-4e^x=-6e^x+9 \mid +6e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4+2e^x=9 \mid -4 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x=5 \mid :2$ $\Leftrightarrow e^x=\frac{5}{2} \mid \ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$ Lösung der Exponentialgleichung durch logarithmieren